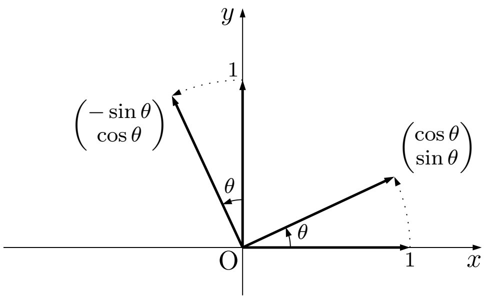
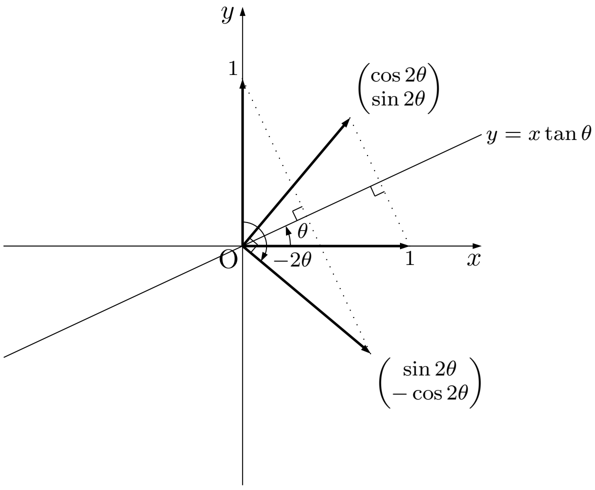
[回転移動]



原点中心にθ回転移動の表現行列は、

$R_\theta := \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$: θ-回転行列

[対称移動]



原点を通り偏角θの直線に関する線対称移動の表現行列は、

$S_\theta := \begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$

[転置行列]

$A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$に対して、${}^tA := \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$: A の転置行列

・$A\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot{}^tA\vec{y}$ ($\because$ 成分計算)

[直交行列]

次の (1) ∼ (7) は互いに必要十分である。

これらの何れかを満たす P を、直交行列という。

(1) $P\vec{x}\cdot P\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{y}$

(2) $|P\vec{x}| = |\vec{x}|$ (等長性)

(3) $|\vec{x}| = 1 \Rightarrow |P\vec{x}| = 1$

(4) $P{}^tP = E$

(5) ${}^tPP = E$

(6) $P =: \begin{pmatrix}\vec{p} & \vec{q}\end{pmatrix}$ とすると、$\vec{p}$と$\vec{q}$は直交する単位ベクトル

(7) $P = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ または $P = \begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$ と表せる

(証)

[(2) $\Rightarrow$ (1)]

$$\begin{aligned}|P(\vec{x}+\vec{y})|^2 &= |P(\vec{x}) + P(\vec{y})|^2\\ &= |P(\vec{x})|^2 + 2P(\vec{x})\cdot P(\vec{y}) + |P(\vec{y})|^2 \cdots ①\end{aligned}$$

$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2 \cdots ②$

①, ②より、$P(\vec{x})\cdot P(\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$

[(3) $\Rightarrow$ (2)]

$\vec{x} = \vec{0}$の時成り立つから、$\vec{x} \fallingdotseq \vec{0}$とする。

$|P\vec{x}| = \left|P\left(|\vec{x}| \cdot \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right)\right| = \left||\vec{x}|P\left(\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right)\right| = |\vec{x}|\left|P\left(\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right)\right| = |\vec{x}| \cdot 1 = |\vec{x}|$

[(1) ⇒ (4), (5)]

$P\vec{x} \cdot P\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$

$\vec{x} \cdot {}^tPP\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$

$\vec{x} \cdot {}^tPP\vec{y} - \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

$\vec{x} \cdot ({}^tPP - E)\vec{y} = 0$

$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を代入すると、$({}^tPP - E)\vec{y} = \vec{0}$

$\vec{y} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を代入すると、${}^tPP - E = O, \therefore {}^tPP = E$

$\therefore P^tP = {}^tPP = E$

[(5) ⇒ (1)]

$P\vec{x} \cdot P\vec{y} = \vec{x} \cdot {}^tPP\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$

[(1) ⇒ (6)]

$\vec{e_1} := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2} := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とすると、$\vec{p} = P\vec{e_1}, \vec{q} = P\vec{e_2}$

$\therefore |\vec{p}| = |P\vec{e_1}| = |\vec{e_1}| = 1,$ 同様に $|\vec{q}| = 1, \vec{p} \cdot \vec{q} = P\vec{e_1} \cdot P\vec{e_2} = \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 0$

[(6) ⇒ (2)]

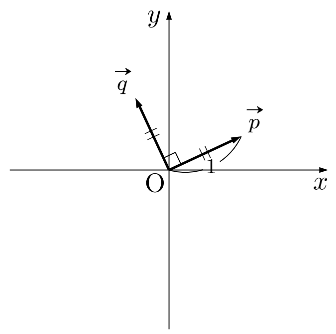
$$\begin{aligned}
|P\vec{x}|^2 &= |P(x\vec{e_1} + y\vec{e_2})|^2 \\
&= |xP\vec{e_1} + yP\vec{e_2}|^2 \\
&= |x\vec{p} + y\vec{q}|^2 \\
&= x^2|\vec{p}|^2 + 2xy\vec{p} \cdot \vec{q} + y^2|\vec{q}|^2 \\
&= x^2 + y^2 \\
&= |\vec{x}|^2
\end{aligned}$$

$\therefore |P\vec{x}| = |\vec{x}|$

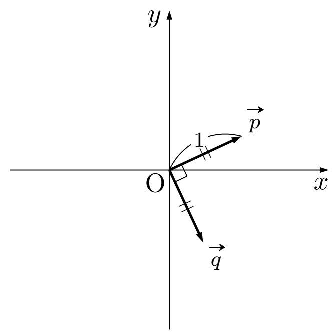
[(6) ⇒ (7)]

$\vec{p}$ と $\vec{q}$ の位置関係は次の 1° または 2° である。

1°



2°



1° の時、$\vec{p} =: \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ とすると、$\vec{q} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

2° の時、$\vec{p} =: \begin{pmatrix}\cos 2\theta\\ \sin 2\theta\end{pmatrix}$ とすると、$\vec{q} = \begin{pmatrix}\sin 2\theta\\ -\cos 2\theta\end{pmatrix}$

故に成り立つ。■

[2 次実対称行列の回転対角化]

2 次正方行列 A が対称行列 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ ${}^tA = A$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$: 対称行列とする。

・$A \fallingdotseq aE \Rightarrow A$ の実固有値は 2 つある。

(証)

$\varDelta(xE - A) = x^2 - (a+b)x + ab - c^2$

判別式 $D = (a+b)^2 - 4(ab - c^2)$

$\quad\quad = (a-b)^2 + 4c^2 \geqq 0$

等号成立は $a = b, c = 0,$ 即ち $A = aE$ の時。

$\therefore D > 0,$ 故に A の実固有値は 2 つある。■

以下、$A \fallingdotseq aE$ とし、A の異なる 2 つの実固有値をα, βとする。

・A の 2 つの不変直線は直交する。

(証)

αに対する固有ベクトル$\overrightarrow{x}$, βに対する固有ベクトル$\overrightarrow{y}$を取る。

$\alpha\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$

$\quad = \overrightarrow{x} \cdot {}^tA\overrightarrow{y}$

$\quad = \overrightarrow{x} \cdot A\overrightarrow{y}$

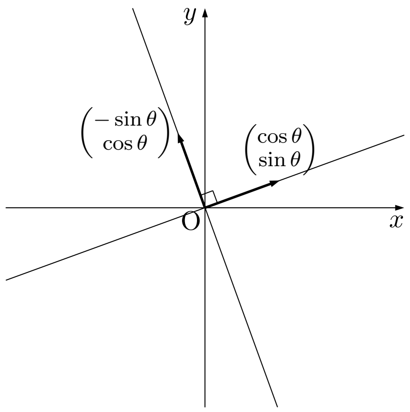
$\quad = \overrightarrow{x} \cdot \beta\overrightarrow{y}$

$\quad = \beta\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$

$\therefore (\alpha - \beta)\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0$

$\alpha \fallingdotseq \beta$より$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0$ ■

故に A の 2 つの不変直線は下図のようになる。



$\overrightarrow{x} := \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \overrightarrow{y} := \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ と取ると、$\begin{pmatrix} \overrightarrow{x} & \overrightarrow{y} \end{pmatrix} = R_\theta =: R$ (θ-回転行列)

この時 $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$: A の回転対角化

[2 次曲線の分類]

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\ (a^2+b^2+c^2 \fallingdotseq 0)$ をグラフの形で分類することを考える。

行列表示すると、$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$

なお、$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ とも表せる。

$\overrightarrow{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, \overrightarrow{d} := \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ とすると、$A\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{x} + f = 0 \cdots$①

先ず、①を原点 O を中心に回転し、A をできるだけ簡単にする。(①の軸を座標軸と平行にする。)

①を原点 O を中心にθ回転させると、

$\underbrace{A(R_{-\theta}\overrightarrow{x}) \cdot R_{-\theta}\overrightarrow{x}}_{\parallel} + \overrightarrow{d} \cdot R_{-\theta}\overrightarrow{x} + f = 0$

${}^tR_{-\theta}AR_{-\theta}\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = R_{-\theta}{}^{-1}AR_{-\theta}\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}$

ここで $R_{-\theta}{}^{-1}AR_{-\theta}$が対角行列となるように$\theta$を取ると、

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} + R_{-\theta}\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{x} + f = 0$ ($\alpha, \beta : A$ の重複を込めた実固有値)

$A' := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \overrightarrow{d'} = \begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} := R_{-\theta}\overrightarrow{d}$ とすると、$A'\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{d'} \cdot \overrightarrow{x} + f = 0 \cdots$②

次に②を平行移動して、項「$+\overrightarrow{d'} \cdot \overrightarrow{x}$」を無くしたい。

②を $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 平行移動させた方程式は、

$A'(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) + \overrightarrow{d'} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) + f = 0$

$A'\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} - \underbrace{A'\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{p}}_{\parallel} - A'\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x} + A'\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} + \overrightarrow{d'} \cdot \overrightarrow{x} - \overrightarrow{d'} \cdot \overrightarrow{p} + f = 0$

$\overrightarrow{p} \cdot A'\overrightarrow{x} = {}^tA'\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x} = A'\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x}$

$A'\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} + (-2A'\overrightarrow{p} + \overrightarrow{d'}) \cdot \overrightarrow{x} + (A'\overrightarrow{p} - \overrightarrow{d'}) \cdot \overrightarrow{p} + f = 0 \cdots$③

1° $\alpha\beta \fallingdotseq 0$ の時 :

$\overrightarrow{p} := \frac{1}{2}A'^{-1}\overrightarrow{d'}$ と取ると、③は $A'\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} - \frac{1}{2}\overrightarrow{d'} \cdot A'^{-1}\overrightarrow{d'} + f = 0 \cdots$③$'$

$g_1 := \frac{1}{2}\overrightarrow{d'} \cdot A'^{-1}\overrightarrow{d'} - f \left(= \frac{d'^2}{2\alpha} + \frac{e'^2}{2\beta} - f \right)$ とすると、

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = g_1 \cdots \begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{g_1}{\alpha}} + \dfrac{y^2}{\frac{g_1}{\beta}} = 1 & (g_1 \fallingdotseq 0) \\ y = \pm\sqrt{-\dfrac{\alpha}{\beta}}x & (g_1 = 0, \alpha\beta < 0) \\ (x, y) = (0, 0) & (g_1 = 0, \alpha\beta > 0) \end{cases}$$

故に③$'$は $\begin{cases} \alpha, \beta, g_1 \text{が同符号ならば楕円} \\ \alpha\beta > 0, g_1 = 0 \text{ ならば 1 点} \\ \alpha\beta > 0, \alpha g_1 < 0 \text{ ならば空集合} \phi \\ \alpha\beta < 0, g_1 \fallingdotseq 0 \text{ ならば双曲線} \\ \alpha\beta < 0, g_1 = 0 \text{ ならば 1 点で交わる 2 直線} \end{cases}$

2° $\alpha \fallingdotseq 0, \beta = 0$ の時 :

$p := \frac{d'}{2\alpha_1}$ と取ると、($-2A'\overrightarrow{p} + \overrightarrow{d'}$ の x 座標) $= 0$

(i) $e' = 0$ の時

③は $A'\vec{x}\cdot\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{d'}\cdot\vec{p}+f=0\cdots$ ③$''$

$g_2:=\frac{1}{2}\vec{d'}\cdot\vec{p}-f\left(=\frac{d'^2}{4\alpha}-f\right)$ とすると、

$\alpha x^2=g_2$

$$x=\pm\sqrt{\frac{g_2}{\alpha}}\cdots\begin{cases}\text{平行な 2 直線} & (g_2\alpha>0)\\ \text{直線} & (g_2=0)\\ \text{空集合}\phi & (g_2\alpha<0)\end{cases}$$

(ii) $e'\fallingdotseq 0$ の時

③は$\alpha x^2+e'y+(A'\vec{p}-\vec{d'})\cdot\vec{p}+f=0$

$g_3:=-(A'\vec{p}-\vec{d'})\cdot\vec{p}-f\left(=\frac{d'^2}{4\alpha}+e'q-f\right)$ とすると、

$y=-\frac{\alpha}{e'}x^2+\frac{g_3}{e'}\cdots$ 放物線

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\ (a^2+b^2+c^2\fallingdotseq 0)$

$$\begin{cases}b^2-4ac<0\begin{cases}d'^2+\frac{\alpha}{\beta}e'^2-\alpha f>0\Rightarrow \text{楕円}\\ d'^2+\frac{\alpha}{\beta}e'^2-\alpha f=0\Rightarrow 1\ \text{点}\\ d'^2+\frac{\alpha}{\beta}e'^2-\alpha f<0\Rightarrow \phi\end{cases}\\ b^2-4ac>0\begin{cases}\frac{d'^2}{\alpha}+\frac{e'^2}{\beta}-2f\fallingdotseq 0\Rightarrow \text{双曲線}\\ \frac{d'^2}{\alpha}+\frac{e'^2}{\beta}-2f=0\Rightarrow 1\ \text{点で交わる}\ 2\ \text{直線}\end{cases}\\ b^2-4ac=0\Rightarrow\alpha\fallingdotseq 0\ \text{とする}\Rightarrow\begin{cases}e'\fallingdotseq 0\begin{cases}d'^2-4\alpha f>0\Rightarrow \text{平行な}\ 2\ \text{直線}\\ d'^2-4\alpha f=0\Rightarrow \text{直線}\\ d'^2-4\alpha f<0\Rightarrow \phi\end{cases}\\ e'=0\Rightarrow \text{放物線}\end{cases}\end{cases}$$