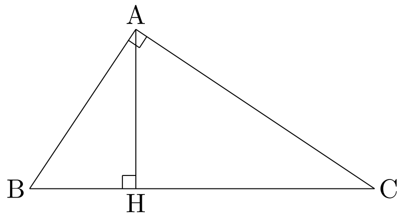
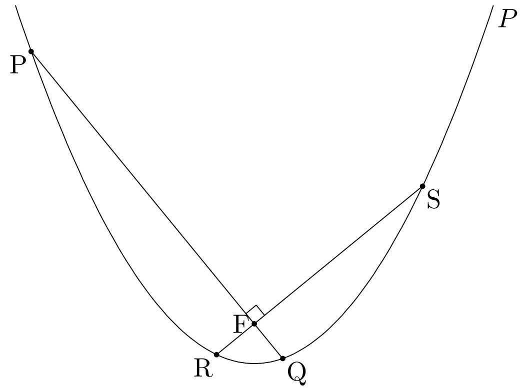
【9】(1) $\angle\mathrm{A} = 90^\circ$を満たす直角 3 角形 ABC において、A から BC に下ろした垂線の足を H とする。

この時、$\dfrac{1}{\mathrm{AB}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{AC}^2} = \dfrac{1}{\mathrm{AH}^2}$を証明せよ。



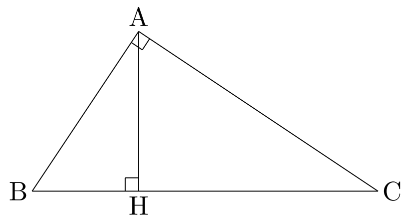
(2) 放物線 P の焦点を F, 準線を ℓ, 頂点を O とする。P 上に 4 点 P, Q, R, S を、PQ, RS が P の焦点弦, $\mathrm{PQ} \perp \mathrm{RS}$ であるように取る。

この時、$\dfrac{1}{\mathrm{FP}\cdot\mathrm{FQ}} + \dfrac{1}{\mathrm{FR}\cdot\mathrm{FS}}$ は P の位置に依らない一定値である事を証明せよ。



[解答]

(1)



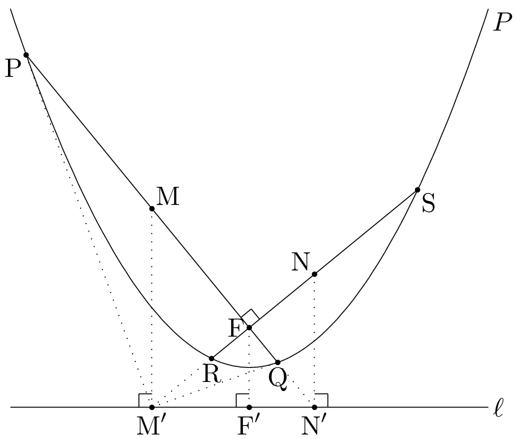
$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2$ (三平方の定理)

両辺を $\mathrm{AB}^2\cdot\mathrm{AC}^2$で割ると、$\dfrac{1}{\mathrm{AC}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{AB}^2}=\dfrac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{AB}^2\cdot\mathrm{AC}^2}$

$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}$ より、$\dfrac{1}{\mathrm{AC}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{AB}^2}=\dfrac{\cancel{\mathrm{BC}^2}\,1}{\cancel{\mathrm{BC}^2}\cdot\mathrm{AH}^2}$

$\therefore\dfrac{1}{\mathrm{AB}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{AC}^2}=\dfrac{1}{\mathrm{AH}^2}$

(2)



点 X から ℓに下ろした垂線の足を X′で表す事にする。

PQ, RS の中点をそれぞれ M, N とする。

足焦定理より、3 点 M′, R, F, 3 点 N′, Q, F はそれぞれ同一直線上に有る。

【7】(1) より $\mathrm{PM}=\mathrm{M'M}=\mathrm{QM},\therefore\angle\mathrm{PM'Q}=90^\circ$

$\therefore\mathrm{FP}\cdot\mathrm{FQ}=\mathrm{FM'}^2\cdots$①

同様に $\mathrm{FR}\cdot\mathrm{FS}=\mathrm{FN'}^2\cdots$②

$$\begin{aligned}\therefore\frac{1}{\mathrm{FP}\cdot\mathrm{FQ}}+\frac{1}{\mathrm{FR}\cdot\mathrm{FS}}&=\frac{1}{\mathrm{FM'}^2}+\frac{1}{\mathrm{FN'}^2}\ (\because ①,②)\\&=\frac{1}{\mathrm{FF'}^2}\ (\because (1))\end{aligned}$$

これは P の位置に依らない。■