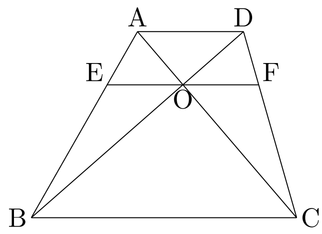
【8】(1) AD // BC を満たす台形 ABCD において、対角線の交点を O とする。O を通り AD に平行な直線と AB, CD の交点をそれぞれ E, F とする。

この時、次の (i), (ii) を証明せよ。

(i) $\mathrm{OE} = \mathrm{OF}$

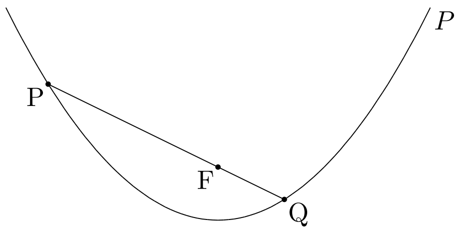
(ii) $\dfrac{1}{\mathrm{AD}} + \dfrac{1}{\mathrm{BC}} = \dfrac{2}{\mathrm{EF}}$



放物線 P の焦点を F, 準線を ℓ, 頂点を O とする。次の (2) ～ (4) を証明せよ。

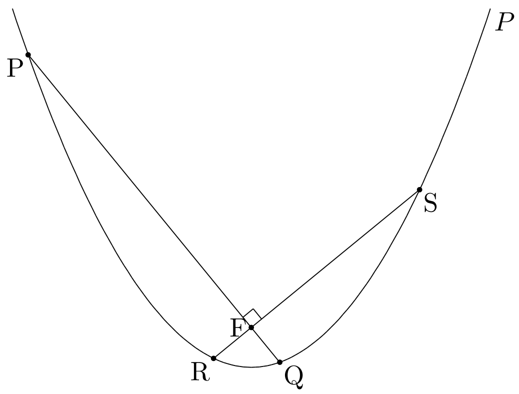
(2) P 上に 2 点 P, Q を、PQ が P の焦点弦であるように取る。

この時、$\dfrac{1}{\mathrm{PF}} + \dfrac{1}{\mathrm{QF}}$ は P の位置に依らない一定値である。

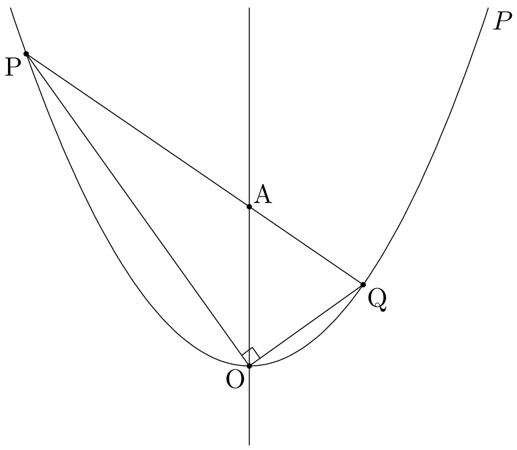


(3) P 上に 4 点 P, Q, R, S を、PQ, RS が P の焦点弦, $\mathrm{PQ} \perp \mathrm{RS}$ であるように取る。

この時、$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}} + \dfrac{1}{\mathrm{RS}}$ は P の位置に依らない一定値である。

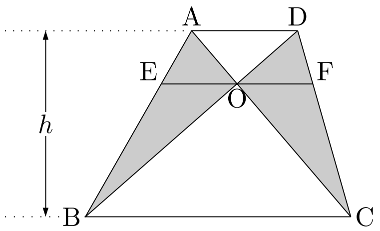


(4) P 上に O と異なる 2 点 P, Q を、$\angle \mathrm{POQ} = 90^\circ$を満たすように取る。
この時、PQ と P の軸の交点 A は P の位置に依らない。



[解答]

(1) (i)



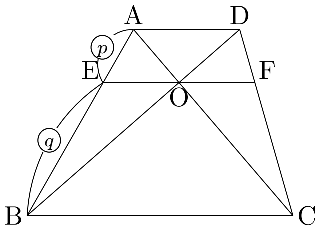
台形 ABCD の高さを h とする。

AD // BC より $\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{DBC}, \therefore \triangle\mathrm{ABO} = \triangle\mathrm{DCO}$

$\therefore \dfrac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \mathrm{OE} \cdot \cancel{h} = \dfrac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \mathrm{OF} \cdot \cancel{h}$

$\therefore \mathrm{OE} = \mathrm{OF}$

(ii)



AE : EB $= p : q$ とする。

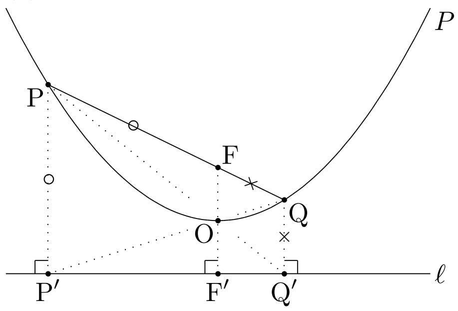
$\dfrac{\mathrm{EO}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{q}{p+q} \cdots ①, \dfrac{\mathrm{EO}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{p}{p+q} \cdots ②$

① + ②より、$\dfrac{\mathrm{EO}}{\mathrm{AD}} + \dfrac{\mathrm{EO}}{\mathrm{BC}} = 1$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\mathrm{AD}} + \frac{1}{\mathrm{BC}} &= \frac{1}{\mathrm{EO}} \\ &= \frac{2}{2\mathrm{EO}} \\ &= \frac{2}{\mathrm{EF}} \ (\because \text{(i)})\end{aligned}$$

以下、点 X から ℓに下ろした垂線の足を X$'$で表す事にする。

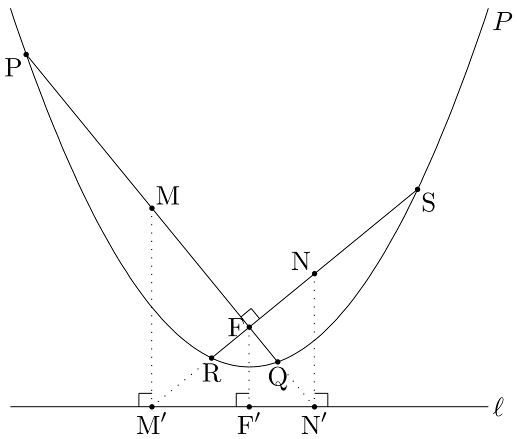
(2)



$\mathrm{PF} : \mathrm{QF} = \mathrm{PP'} : \mathrm{QQ'}, \mathrm{OF} = \mathrm{OF'}$, 故に、(1)(i) より O は PQ$'$と QP$'$の交点である。

故に、(1)(ii) より $\dfrac{1}{\mathrm{PF}} + \dfrac{1}{\mathrm{QF}} = \dfrac{1}{\mathrm{PP'}} + \dfrac{1}{\mathrm{QQ'}} = \dfrac{2}{\mathrm{FF'}}$, これは P の位置に依らない。

(3)



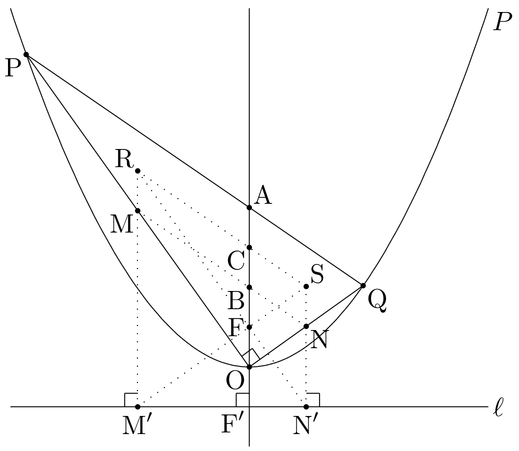
PQ, RS の中点をそれぞれ M, N とする。

足焦定理より、3 点 M′, R, F, 3 点 N′, Q, F はそれぞれ同一直線上に有る。

$$
\begin{aligned}
\therefore \frac{1}{\mathrm{PQ}}+\frac{1}{\mathrm{RS}} &= \frac{1}{2\mathrm{MM'}}+\frac{1}{2\mathrm{NN'}} \quad (\because【7】(1))\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{MM'}}+\frac{1}{\mathrm{NN'}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{FF'}} \quad (\because (1))\\
&= \frac{1}{2\mathrm{FF'}}
\end{aligned}
$$

これは P の位置に依らない。

(4)



OP, OQ の中点をそれぞれ M, N とする。

直線 M′M と直線 N′F, 直線 N′N と直線 M′F の交点をそれぞれ R, S とする。

直線 FF′ と MN, RS の交点をそれぞれ B, C とする。

足焦定理より $\mathrm{M'F} \perp \mathrm{OP}, \mathrm{N'F} \perp \mathrm{OQ}$

故に、$\angle\mathrm{POQ} = 90°$ より、$\mathrm{OM} \mathbin{/\!/} \mathrm{FR}, \mathrm{ON} \mathbin{/\!/} \mathrm{FS}$

故に、$\mathrm{RM} \mathbin{/\!/} \mathrm{FO} \mathbin{/\!/} \mathrm{SN}$ より、4 角形 RMOF, 4 角形 SNOF は平行 4 辺形である。

$\therefore \triangle\mathrm{OMN} \equiv \triangle\mathrm{FRS}$ (2 辺夾角相等)

$\therefore \mathrm{OB} = \mathrm{FC}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{OA} &= 2\mathrm{OB} \text{ (中点連結定理)} \\ &= 2\mathrm{FC} \\ &= 2\mathrm{FF'} \ (\because (1)(\mathrm{i}))\end{aligned}$$

これは P の位置に依らない。

故に A は P の位置に依らない。■