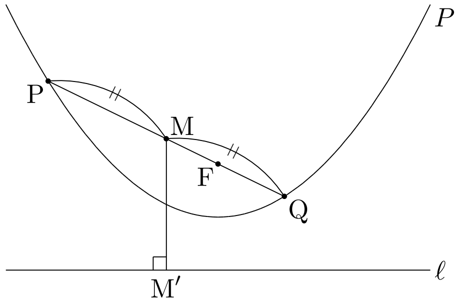
【7】 放物線 P の焦点を F, 準線を ℓ, 頂点を O とする。次の (1) ~ (3) を証明せよ。

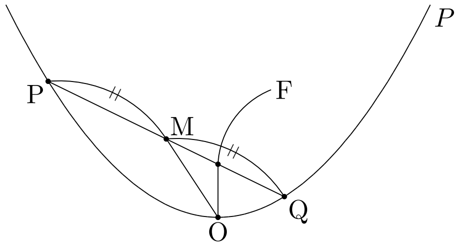
(1) P 上に 2 点 P, Q を、PQ が P の焦点弦 (F を通る弦) であるように取る。PQ の中点を M として、M から ℓ に下ろした垂線の足を M$'$とする。

この時、$\mathrm{MM}' = \mathrm{PM}$



(2) P 上に 2 点 P, Q を、PQ が P の焦点弦であるように取り、PQ の中点を M とする。

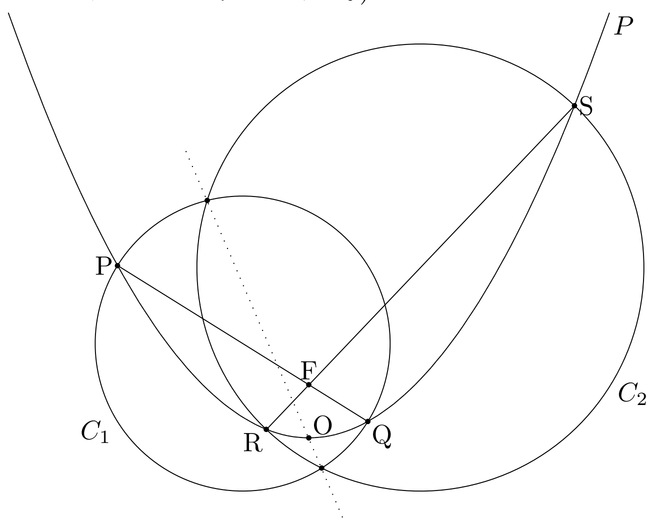
この時、$\mathrm{PM}^2 - \mathrm{OM}^2 = 3\mathrm{OF}^2$



(3) P 上に 4 点 P, Q, R, S を、PQ, RS が P の焦点弦であるように取る。PQ, RS を直径とする円をそれぞれ C_1, C_2 とする。

この時、C_1, C_2の根軸 (2 つの交点を通る直線) は O を通る。

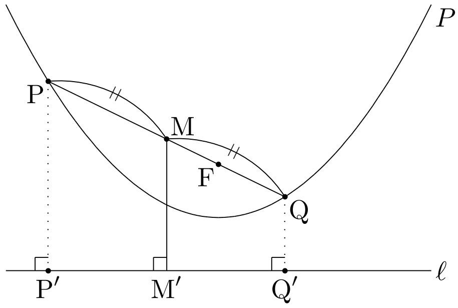
(C_1と C_2が 2 点で交わる事は既知とする。)



[解答]

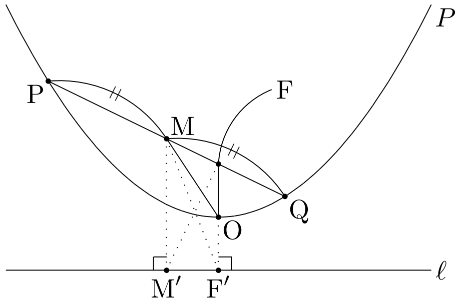
点 X から ℓ に下ろした垂線の足を X′ で表す事にする。

(1)



$\mathrm{MM'} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{PP'} + \mathrm{QQ'}) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{PF} + \mathrm{QF}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{PQ} = \mathrm{PM}$

(2)



$\triangle\mathrm{MF'F}$ において、$\mathrm{MF'}^2 + \mathrm{MF}^2 = 2(\mathrm{OM}^2 + \mathrm{OF}^2)$ (中線定理) $\cdots$ ①

ここで、$\mathrm{MF'}^2 = \mathrm{M'M}^2 + \mathrm{M'F'}^2 \cdots$ ②

足焦定理より $\angle\mathrm{M'FM} = 90^\circ, \therefore \mathrm{MF}^2 = \mathrm{M'M}^2 - \mathrm{M'F}^2 \cdots$ ③

②, ③を①に代入すると、$(\mathrm{M'M}^2 + \mathrm{M'F'}^2) + (\mathrm{M'M}^2 - \mathrm{M'F}^2) = 2(\mathrm{OM}^2 + \mathrm{OF}^2)$

$\therefore 2\mathrm{MM'}^2 + \mathrm{M'F'}^2 - \mathrm{M'F}^2 = 2(\mathrm{OM}^2 + \mathrm{OF}^2) \cdots$ ④

ここで、$\mathrm{M'F}^2 - \mathrm{M'F'}^2 = \mathrm{FF'}^2 = (2\mathrm{OF})^2 = 4\mathrm{OF}^2 \cdots$ ⑤

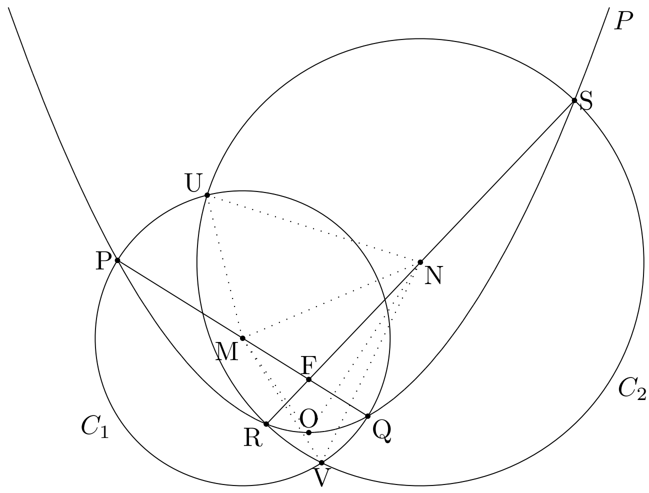
(1) より $\mathrm{MM'} = \mathrm{PM} \cdots$ ⑥

⑤, ⑥を④に代入すると、$\cancel{2}\mathrm{PM}^2 - \cancel{4}^{2}\mathrm{OF}^2 = \cancel{2}(\mathrm{OM}^2 + \mathrm{OF}^2)$

$\therefore \mathrm{PM}^2 - 2\mathrm{OF}^2 = \mathrm{OM}^2 + \mathrm{OF}^2$

$\therefore \mathrm{PM}^2 - \mathrm{OM}^2 = 3\mathrm{OF}^2$

(3)



PQ, RS の中点をそれぞれ M, N とする。

C_1と C_2の交点の内、O でない方の 1 つを U, もう一方を V とする。

(1) より $\mathrm{PM}^2 - \mathrm{OM}^2 = 3\mathrm{OF}^2 = \mathrm{RN}^2 - \mathrm{ON}^2$

$\therefore \mathrm{MU}^2 - \mathrm{MO}^2 = \mathrm{NU}^2 - \mathrm{NO}^2$

故に、$\mathrm{U} \fallingdotseq \mathrm{O}$,【3】(1) より、$\mathrm{MN} \perp \mathrm{UO} \cdots$ ①

一方、$\triangle\mathrm{UMN} \equiv \triangle\mathrm{VMN}$ より $\mathrm{MN} \perp \mathrm{UV} \cdots$ ②

①, ②より、O は直線 UV 上に有る。■