【5】 [双対相似定理]

$\triangle$ABD $\backsim$ $\triangle$CAD であり、この 2 つが直線 AD に関して反対であるとする。

直線 AD と $\triangle$ABC の外接円の交点の内、A でない方を E とする。辺 BC の中点を M とする。

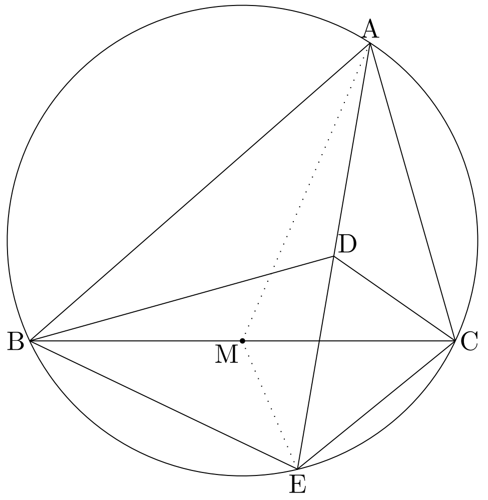
次の (1) $\sim$ (4) を証明せよ。

(1) $\triangle$BED $\backsim$ $\triangle$ECD

(2) AD $=$ ED

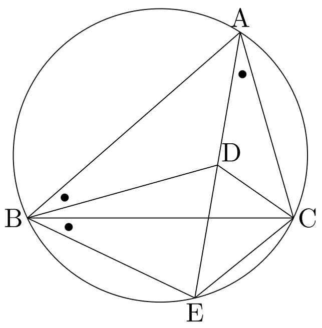
(3) $\triangle$ABM $\backsim$ $\triangle$BEM

(4) DB $+$ DC $=$ MA $+$ ME



[解答]

(1)



$\angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{EAC}$ ($\overset{\frown}{\mathrm{EC}}$に対する円周角)

$= \angle\mathrm{DBA}$ ($\because \triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{CAD}$)

$\therefore \angle\mathrm{DBE} = \angle\mathrm{ABC}$

$= \angle\mathrm{DEC}$ ($\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$に対する円周角)

$\therefore \angle\mathrm{DBE} = \angle\mathrm{DEC} \cdots$ ①

同様に$\angle\mathrm{DCE} = \angle\mathrm{DEB} \cdots$ ②

①, ②より $\triangle\mathrm{BED} \backsim \triangle\mathrm{ECD}$ (2 角相等)

(2)

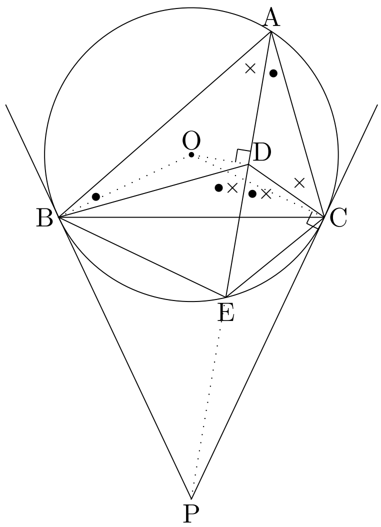
$\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{CAD}$ より $\mathrm{AD}^2 = \mathrm{BD} \cdot \mathrm{CD}$

(1) より $\mathrm{ED}^2 = \mathrm{BD} \cdot \mathrm{CD}$

$\therefore \mathrm{AD}^2 = \mathrm{ED}^2$

$\therefore \mathrm{AD} = \mathrm{ED}$

(3)



$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心を O とする。

$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の B, C における接線の交点を P とする。

(2) より$\angle\mathrm{ODE} = 90^\circ \cdots$ ③

$\angle\mathrm{BDC} = 2\angle\mathrm{BAC}$ ($\because \triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{CAD}$)

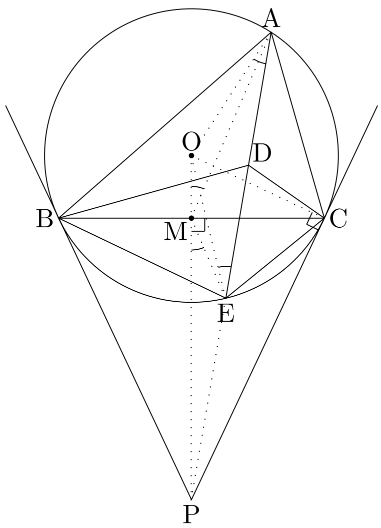
$= \angle\mathrm{BOC}$

より O, B, C, D は共円点。

O, B, C, P も共円点だから、O, B, P, C, D は共円点。

$\therefore \angle\mathrm{ODP} = \angle\mathrm{OCP} = 90^\circ \cdots$ ④

③, ④より、3 点 D, E, P は同一直線上に有る。



BC と OP の交点は M に一致する。

$\angle\mathrm{OCP} = \angle\mathrm{CMP} = 90^\circ$より $\mathrm{PM} \cdot \mathrm{PO} = \mathrm{PC}^2 \cdots$ ⑤

方べきの定理より $\mathrm{PC}^2 = \mathrm{PE} \cdot \mathrm{PA} \cdots$ ⑥

⑤, ⑥より $\mathrm{PM} \cdot \mathrm{PO} = \mathrm{PE} \cdot \mathrm{PA}$

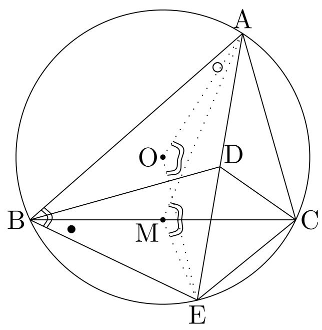
故に、方べきの定理の逆より O, M, E, A は共円点。

$\therefore \angle\mathrm{EMP} = \angle\mathrm{OAP}$ (内対角)

$= \angle\mathrm{OEA}$ ($\because \mathrm{OA} = \mathrm{OE}$)

$= \angle\mathrm{OMA}$ ($\overset{\frown}{\mathrm{AO}}$に対する円周角)

$\therefore \angle\mathrm{CMA} = \angle\mathrm{CME} \cdots$ ⑦



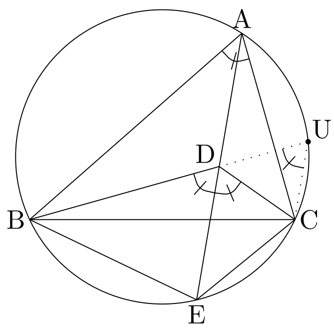
$$
\begin{aligned}
\angle \mathrm{CMA} &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{AME} \\
&= \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOE} \\
&= \angle \mathrm{ABE}
\end{aligned}
$$

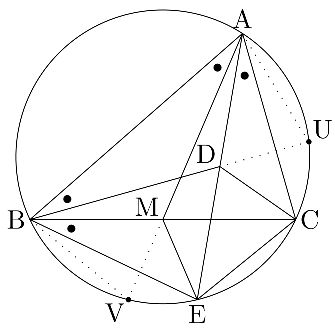
$$
\begin{aligned}
\therefore \angle \mathrm{BAM} &= \angle \mathrm{CMA} - \angle \mathrm{ABM} \\
&= \angle \mathrm{ABE} - \angle \mathrm{ABM} \\
&= \angle \mathrm{EBM}
\end{aligned}
$$

$\therefore \angle \mathrm{BAM} = \angle \mathrm{EBM} \cdots$ ⑧

⑦, ⑧より $\triangle \mathrm{ABM} \backsim \triangle \mathrm{BEM}$ (2 角相等)

(4)





直線 BD と円 O の交点の内 B でない方を U とする。

$\angle \mathrm{DUC} = \angle \mathrm{BAC}$ ($\overset{\frown}{\mathrm{BEC}}$に対する円周角)

$\quad = \frac{1}{2}\angle \mathrm{BDC}$ ($\because \triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{CAD}$)

$\therefore \angle \mathrm{DCU} = \angle \mathrm{BDC} - \angle \mathrm{DUC} = \angle \mathrm{DUC}$

$\therefore \mathrm{DU} = \mathrm{DC}$

$\therefore \mathrm{DB} + \mathrm{DC} = \mathrm{DB} + \mathrm{DU} = \mathrm{BU} \cdots$ ⑨

直線 AM と円 O の交点の内 A でない方を V とする。

⑨と同様にして、$\mathrm{MA} + \mathrm{ME} = \mathrm{AV} \cdots$ ⑩

$\triangle \mathrm{ABU}$ と $\triangle \mathrm{BAV}$ において、

$\angle \mathrm{ABU} = \angle \mathrm{CAD}$ ($\because \triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{CAD}$)

$\quad = \angle \mathrm{CBE}$ ($\overset{\frown}{\mathrm{CE}}$に対する円周角)

$\quad = \angle \mathrm{MAB}$ ($\because$ (3))

$\therefore \angle \mathrm{ABU} = \angle \mathrm{BAV} \cdots$ ⑪

$\angle \mathrm{AUB} = \angle \mathrm{AEB}$ ($\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$に対する円周角) $\cdots$ ⑫

AB 共通 $\cdots$ ⑬

⑪, ⑫, ⑬より $\triangle \mathrm{ABU} \equiv \triangle \mathrm{BAV}$ (1 辺両端角相等)

故に、⑨, ⑩より $\mathrm{DB} + \mathrm{DC} = \mathrm{BU} = \mathrm{AV} = \mathrm{MA} + \mathrm{ME}$ ■