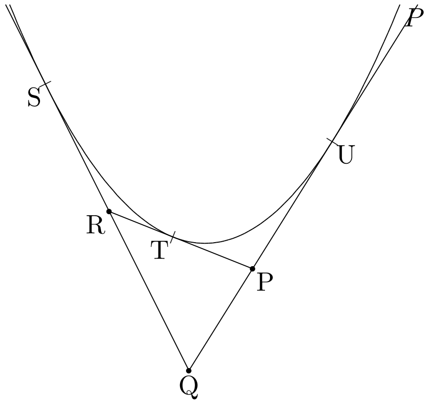
【4】 放物線 P の焦点を F, 準線を ℓ とする。次の (1), (2) を証明せよ。

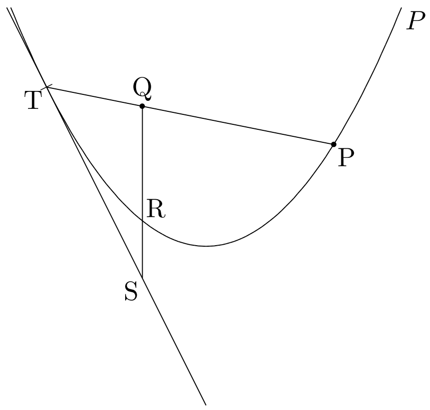
(1) P 上に 3 点を取り、左から順に S, T, U とする。P の T, U における接線の交点を P, P の U, S における接線の交点を Q, P の S, T における接線の交点を R とする。

この時、SR : RQ = RT : TP = QP : PU



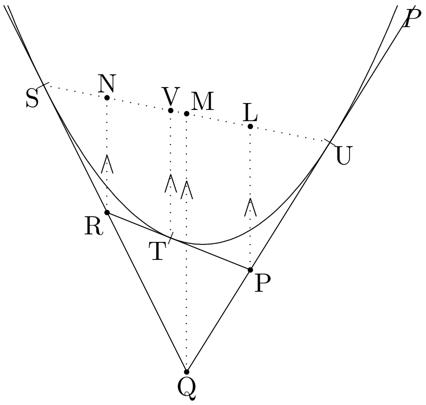
(2) P 上に 2 点 T, P を取る。弦 TP 上に点 Q を取る。Q を通り P の軸に平行な直線と P, P の T における接線の交点をそれぞれ R, S とする。

この時、TQ : QP = SR : RQ



[解答]

(1)



P の軸に平行で、T, P, Q, R を通る直線と SU の交点をそれぞれ V, L, M, N とする。

$\dfrac{\mathrm{SR}}{\mathrm{SQ}}=\dfrac{\mathrm{SN}}{\mathrm{SM}}=\dfrac{2\mathrm{SN}}{2\mathrm{SM}}=\dfrac{\mathrm{SV}}{\mathrm{SU}}\cdots$①

$\dfrac{\mathrm{RT}}{\mathrm{RP}}=\dfrac{\mathrm{NV}}{\mathrm{NL}}=\dfrac{2\mathrm{NV}}{2\mathrm{NL}}=\dfrac{\mathrm{SV}}{\mathrm{SU}}\cdots$②

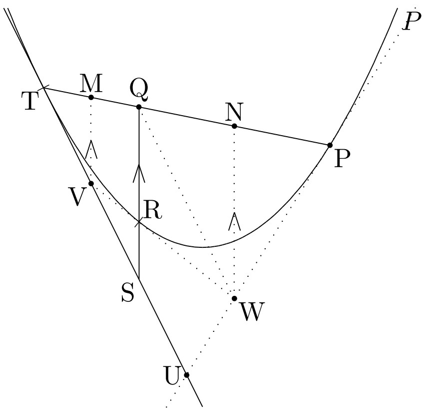
①, ②より $\dfrac{\mathrm{SR}}{\mathrm{SQ}}=\dfrac{\mathrm{RT}}{\mathrm{RP}}$

$\therefore\dfrac{\mathrm{SR}}{\mathrm{RQ}}=\dfrac{\mathrm{RT}}{\mathrm{TP}}$

同様にして $\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{PU}}=\dfrac{\mathrm{RT}}{\mathrm{TP}}$

$\therefore\dfrac{\mathrm{SR}}{\mathrm{RQ}}=\dfrac{\mathrm{RT}}{\mathrm{TP}}=\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{PU}}$

(2)



P の P における接線と P の T における接線の交点を U とする。

P の R における接線と P の T, P における接線の交点をそれぞれ V, W とする。

P の軸に平行で、V, W を通る直線と TP の交点をそれぞれ M, N とする。

(1)①より $\dfrac{\mathrm{PW}}{\mathrm{PU}}=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PT}}, \therefore \mathrm{QW} /\!/ \mathrm{TU}$

$\therefore\dfrac{\mathrm{TQ}}{\mathrm{QP}}=\dfrac{2\mathrm{MQ}}{2\mathrm{QN}}=\dfrac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QN}}=\dfrac{\mathrm{VR}}{\mathrm{RW}}=\dfrac{\mathrm{SR}}{\mathrm{RQ}}$ ■