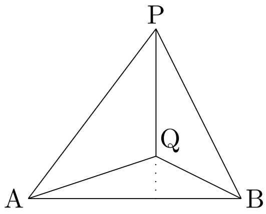
【3】 (1) 平面上の線分 AB と 2 点 P, Q に対して、次の (i), (ii) は互いに同値である事を証明せよ。

(i) $\mathrm{PQ} \perp \mathrm{AB}$

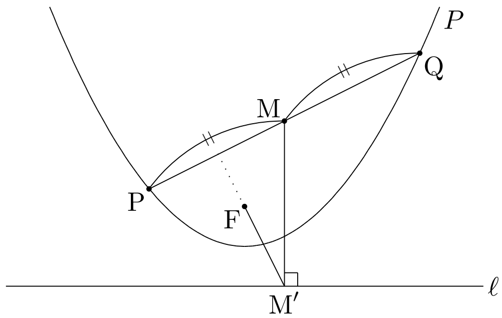
(ii) $\mathrm{AP}^2 - \mathrm{BP}^2 = \mathrm{AQ}^2 - \mathrm{BQ}^2$



放物線 P の焦点を F, 準線を ℓ とする。次の (2) ～ (5) を証明せよ。

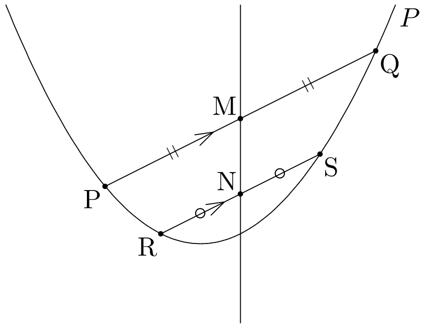
(2) P 上に 2 点 P, Q を取り、PQ の中点を M とする。M から ℓ に下ろした垂線の足を M$'$ とする。

この時、$\mathrm{M'F} \perp \mathrm{PQ}$[足焦定理]



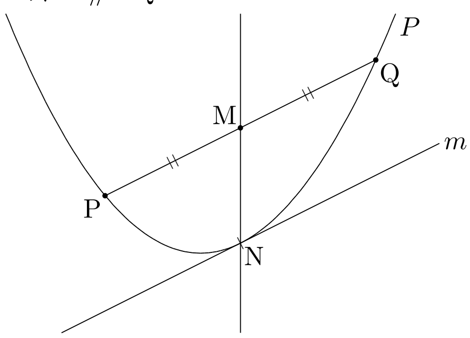
(3) P 上に 4 点 P, Q, R, S を PQ // RS を満たすように取る。PQ, RS の中点をそれぞれ M, N とする。

この時、直線 MN は P の軸に平行である。



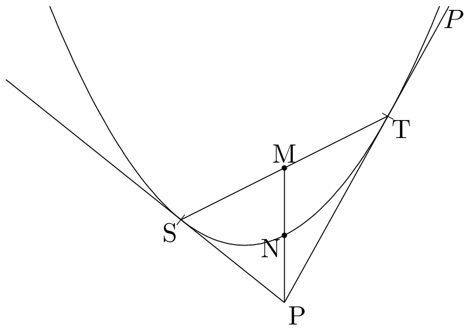
(4) P 上に 2 点 P, Q を取り、PQ の中点を M とする。M を通り P の軸に平行な直線と P の交点を N とする。P の N における接線を m とする。

この時、m // PQ



(5) 点 P から P に 2 つの接線を引き、接点を S, T とする。P を通り P の軸に平行な直線と ST, P の交点をそれぞれ M, N とする。

この時、$\mathrm{NM} = \mathrm{NP}$



[解答]

(1)

[(i) $\Rightarrow$ (ii)]

P から直線 AB に下ろした垂線の足を H とする。

$\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=(\mathrm{AH}^2\cancel{+\mathrm{PH}^2})-(\mathrm{BH}^2\cancel{+\mathrm{PH}^2})$

$\qquad\qquad\quad=\mathrm{AH}^2-\mathrm{BH}^2\cdots$①

同様にして $\mathrm{AQ}^2-\mathrm{BQ}^2=\mathrm{AH}^2-\mathrm{BH}^2\cdots$②

①,②より $\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=\mathrm{AQ}^2-\mathrm{BQ}^2$

[(ii) $\Rightarrow$ (i)]

P, Q から直線 AB に下ろした垂線の足をそれぞれ H, I とする。

$\mathrm{AH}^2-\mathrm{BH}^2=\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2$ ($\because$ [(i) $\Rightarrow$ (ii)] の過程)

$\qquad\qquad\quad=\mathrm{AQ}^2-\mathrm{BQ}^2$ ($\because$ (ii))

$\qquad\qquad\quad=\mathrm{AI}^2-\mathrm{BI}^2$ ($\because$ [(i) $\Rightarrow$ (ii)] の過程)$\cdots$③

直線 AB 上の点 X が A より x だけ右に有る事を X(x) で表す事にする。

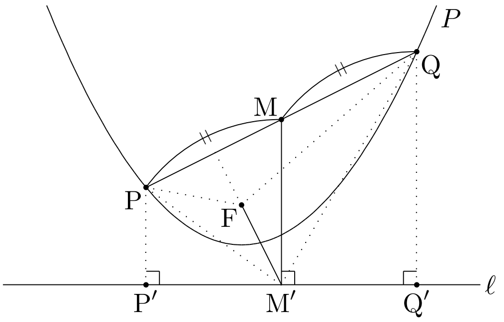
直線 AB 上の点 X(x) に対して、

$\mathrm{AX}^2-\mathrm{BX}^2=(\mathrm{AX}+\mathrm{BX})(\mathrm{AX}-\mathrm{BX})$ は x の狭義増加関数。

故に、H(p), I(q) とすると、③より $p=q, \therefore \mathrm{H}=\mathrm{I}, \therefore \mathrm{PQ}\perp\mathrm{AB}$

以下、点 X から ℓに下ろした垂線の足を X$'$で表す事にする。

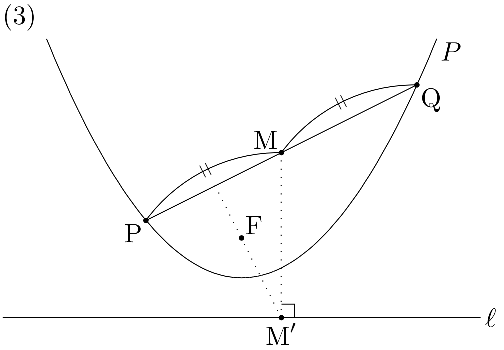
(2)



$\mathrm{FP}^2-\mathrm{FQ}^2=\mathrm{P'P}^2-\mathrm{Q'Q}^2=(\mathrm{P'P}^2+\mathrm{P'M'}^2)-(\mathrm{Q'Q}^2+\mathrm{P'M'}^2)=\mathrm{PM'}^2-\mathrm{QM'}^2$

故に、(1) より $\mathrm{M'F}\perp\mathrm{PQ}$

(3)



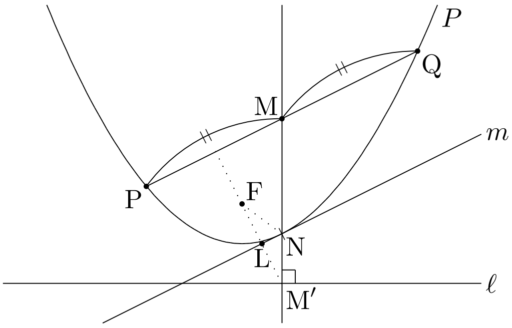
足焦定理より、$\mathrm{M'F}\perp\mathrm{PQ}, \mathrm{N'F}\perp\mathrm{RS}$

故に、PQ $/\!/$ RS より $\mathrm{M'F}\,/\!/\,\mathrm{N'F}$

$\therefore \mathrm{M'}=\mathrm{N'}$

故に成り立つ。

(4)



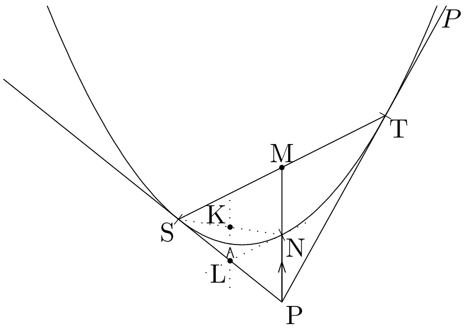
M′F と m の交点を L とする。

足焦定理より、M′F $\perp$ PQ $\cdots$ ①

$\triangle$NFM′において、NF $=$ NM′と光線定理より、NL $\perp$ FM′ $\cdots$ ②

①, ②より m // PQ

(5)



P の N における接線と PS の交点を L とする。

L を通り P の軸に平行な直線と SN の交点を K とする。

【2】(4) より KS $=$ KN

故に、KL // NP より LS $=$ LP $\cdots$ ①

【2】(4) より MS $=$ MT, 故に (4) より LN // ST $\cdots$ ②

①, ②より NM $=$ NP ■