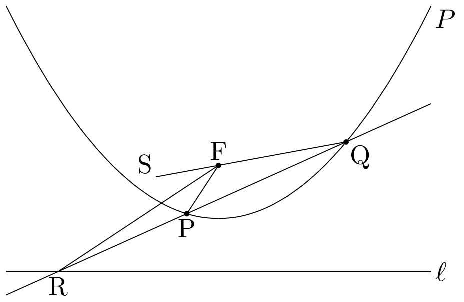
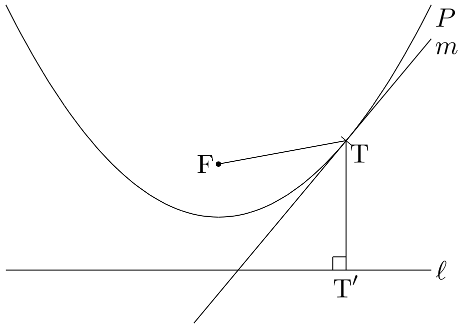
【2】 放物線 P の焦点を F, 準線を ℓ とする。次の (1) ～ (4) を証明せよ。

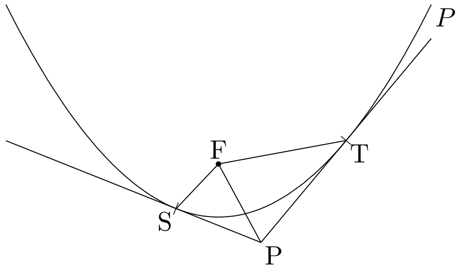
(1) 放物線 P 上に 2 点 P, Q を取る。直線 PQ と ℓ の交点を R とする。半直線 QFS を引く。
この時 FR は∠RFS を 2 等分する。



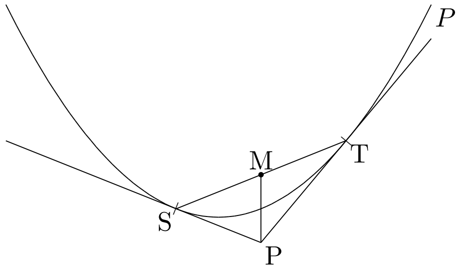
(2) 放物線 P 上に点 T を取り、T から ℓ に下ろした垂線の足を T′, P の T における接線を m とする。
この時 m は∠FTT′の 2 等分線である。[光線定理]



(3) 点 P から放物線 P に 2 つの接線を引き、接点を S, T とする。
この時、△FSP ∽ △FPT[2 接線系基本定理]



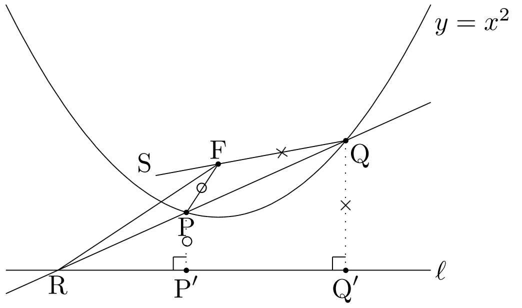
(4) 点 P から放物線 P に 2 つの接線を引き、接点を S, T とする。P を通り P の軸に平行な直線と ST の交点を M とする。
この時、MS = MT



[解答]

点 X から ℓに下ろした垂線の足を X'で表す事にする。

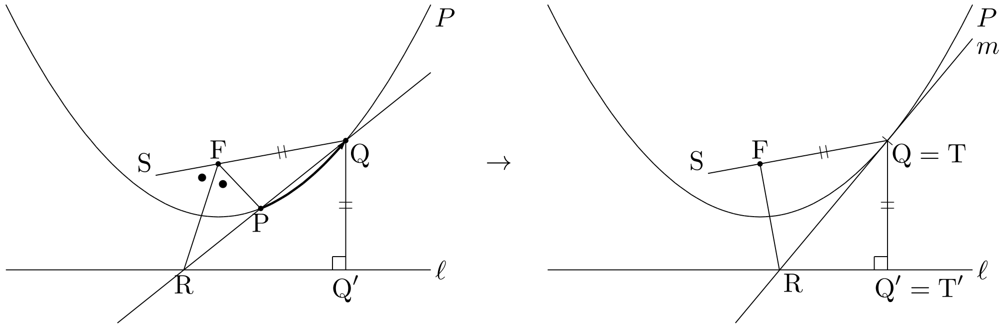
(1)



$\mathrm{FQ}:\mathrm{FP}=\mathrm{Q}'\mathrm{Q}:\mathrm{P}'\mathrm{P}=\mathrm{RQ}:\mathrm{RP}$

故に、外角の 2 等分線の定理の逆より、FR は$\angle$RFS を 2 等分する。

(2)



(1) において、$\angle\mathrm{PFR}=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle\mathrm{QFP})$

両辺を $\mathrm{P}\to\mathrm{Q}$ とすると、$\angle\mathrm{QFR}=90^\circ$

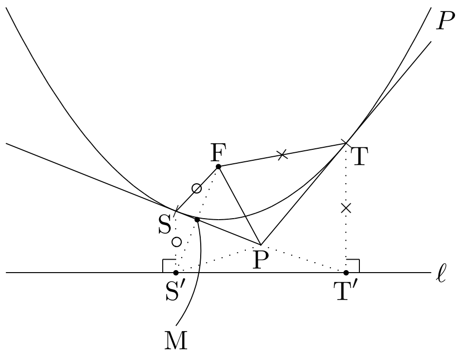
故に、(2) の図において、$\angle\mathrm{TFR}=90^\circ\cdots$①

ここで$\angle\mathrm{TT}'\mathrm{R}=90^\circ$ (仮定)$\cdots$②, TR は共通$\cdots$③, $\mathrm{TF}=\mathrm{TT}'$ (P の定義)$\cdots$④

① ～ ④より $\triangle\mathrm{TFR}\equiv\triangle\mathrm{TT}'\mathrm{R}$ (斜辺と他の 1 辺相等)

故に m は$\angle\mathrm{FTT}'$を 2 等分する。

(3)



$\mathrm{FS'}$と直線 PS の交点を M とする。

$\mathrm{SF}=\mathrm{SS'}$, (2) より、直線 SP は $\mathrm{FS'}$の垂直 2 等分線$\cdots$①

同様にして、直線 TP は $\mathrm{FT'}$の垂直 2 等分線$\cdots$②

①, ②より $\mathrm{PS'}=\mathrm{PF}=\mathrm{PT'}$, 故に P は $\triangle\mathrm{FS'T'}$の外心である。$\cdots$③

$$\begin{aligned}\therefore \angle\mathrm{FSP} &= \angle\mathrm{S'SP}\ (\because ①)\\ &= \angle\mathrm{MS'T'}\ (\because \angle\mathrm{SMS'}=\angle\mathrm{SS'T'}=90^\circ)\\ &= \frac{1}{2}\angle\mathrm{FPT'}\ (\because ③)\\ &= \angle\mathrm{FPT}\ (\because ②)\cdots④\end{aligned}$$

同様にして$\angle\mathrm{FTP}=\angle\mathrm{FPS}\cdots$⑤

④, ⑤より $\triangle\mathrm{FSP} \backsim \triangle\mathrm{FPT}$ (2 角相等)

(4)

(3) 解答において、$\mathrm{PS'}=\mathrm{PT'}$

$\therefore \mathrm{P'S'}=\mathrm{P'T'}$

$\therefore \mathrm{MS}=\mathrm{MT}$ ■