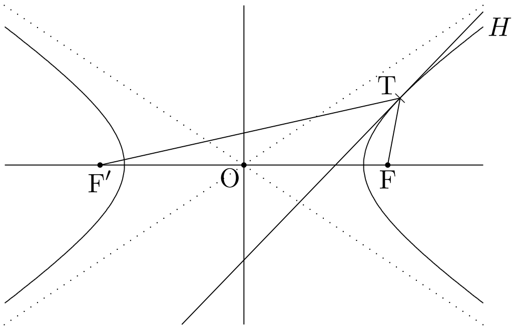
【14】双曲線 H の焦点を F, F' とする。H の主軸と H の交点の内、F に近い方を A, 他方を A' とする。H の A における接線と H の漸近線の交点 C, C' を、$\mathrm{C}, \mathrm{F}', \mathrm{C}'$ が反時計回りであるように決める。C, C' から H の副軸に下ろした垂線の足をそれぞれ B, B' とする。H の中心を O とする。$\mathrm{OA} = a, \mathrm{OB} = b$ とする。次の (1) ～ (3) を証明せよ。

(1) H 上に点 T を取る。この時、H の T における接線は $\angle\mathrm{FTF}'$ を 2 等分する。[光線定理]

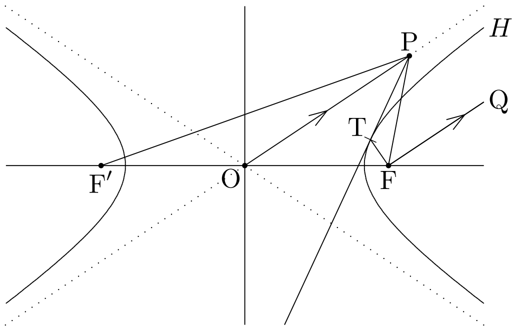


(2) H の漸近線上の点 P を O と異なるように取る。P から H に引いた接線の接点を T とする。この時、次の (i), (ii) が成り立つ。[広義 2 接線系基本定理]

(i) $\angle\mathrm{FPT} = \angle\mathrm{F}'\mathrm{PO}$

(ii) H の主軸に関して P と同じ側の点 Q を、$\mathrm{FQ} \mathbin{/\!/} \mathrm{OP}$ を満たすように取る。

この時 $\angle\mathrm{PFT} = \angle\mathrm{PFQ}$



(3) H 上に点 T を取る。H の T における接線と H の漸近線の交点を P, Q とする。この時、次の (i) ～ (v) が成り立つ。

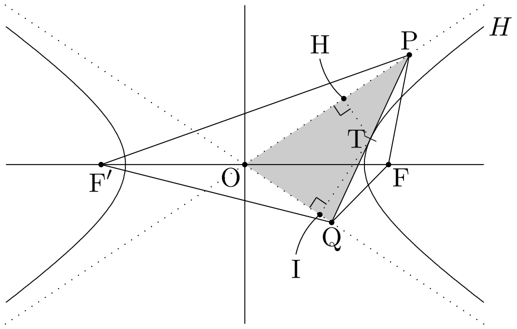
(i) $\angle\mathrm{PFQ}, \angle\mathrm{PF}'\mathrm{Q}$ は T の位置に依らない。$\angle\mathrm{PFQ} + \angle\mathrm{PF}'\mathrm{Q} = 180°$

(ii) $\mathrm{TP} = \mathrm{TQ}$

(iii) $\mathrm{TF} + \mathrm{TF}' = \mathrm{OP} + \mathrm{OQ}$

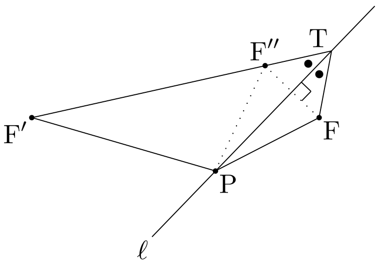
(iv) $\triangle\mathrm{OPQ}$ は T の位置に依らない。

(v) T から H の漸近線に下ろした垂線の足を H, I とする。この時 $\mathrm{TH} \cdot \mathrm{TI}$ は T の位置に依らない。



[解答]

(1)



$\angle \mathrm{F'TF}$ の 2 等分線を ℓとする。

F の ℓに関する対称点を $\mathrm{F''}$とする。この時、ℓの定義より、$\mathrm{F''}$は半直線 $\mathrm{TF'}$上に有る。$\cdots$①

ℓ上の点で、T でない任意の点 P を取る。

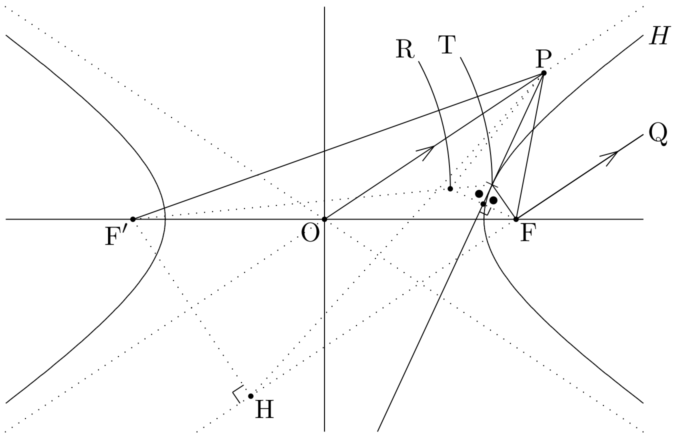
$$
\begin{aligned}
|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}| &= |\mathrm{PF''}-\mathrm{PF'}| \\
&< \mathrm{F'F''}\ (\because \triangle \mathrm{PF''F'}\text{に関する 3 角形不等式}) \\
&= |\mathrm{TF'}-\mathrm{TF''}|\ (\because ①) \\
&= |\mathrm{TF'}-\mathrm{TF}|
\end{aligned}
$$

故に、P は H の内側に有る。

故に、H と ℓは T のみで交わる。

故に、ℓは H の T における接線である。

(2)



F の直線 PT に関する対称点を R とする。

光線定理より、R は半直線 $\mathrm{TF'}$上に有る。$\cdots$①

$\mathrm{F'}$から直線 QF に下ろした垂線の足を H とする。

①より、$\mathrm{F'R} = |\mathrm{TF'}-\mathrm{TR}| = |\mathrm{TF'}-\mathrm{TF}| = 2a\cdots$②

双曲線の焦点の性質より、$\mathrm{HF} = 2a\cdots$③

②, ③より、$\mathrm{F'R} = \mathrm{HF}\cdots$④

$\mathrm{OF} = \mathrm{OF'}$より $\mathrm{PF'} = \mathrm{PH}\cdots$⑤, $\mathrm{PR} = \mathrm{PF}\cdots$⑥

④, ⑤, ⑥より $\triangle \mathrm{PF'R} \equiv \triangle \mathrm{PHF}$ (3 辺相等)$\cdots$⑦

⑦より$\angle \mathrm{F'PR} = \angle \mathrm{HPF}$

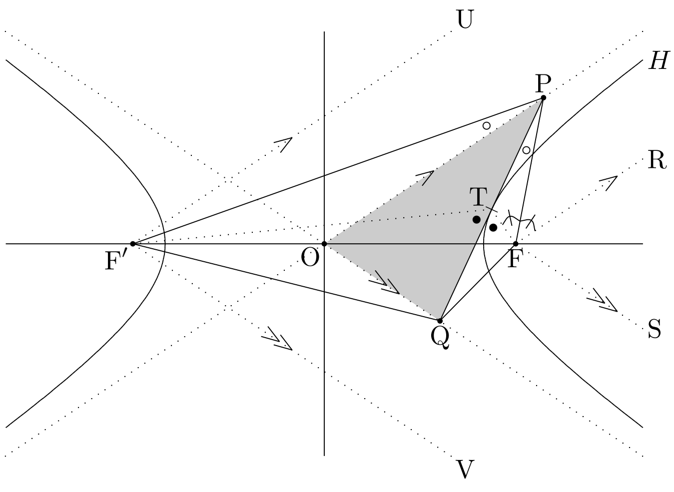
$\therefore \angle \mathrm{F'PH} = \angle \mathrm{RPF}$

$\therefore \cancel{2}\angle \mathrm{F'PO} = \cancel{2}\angle \mathrm{FPT}$

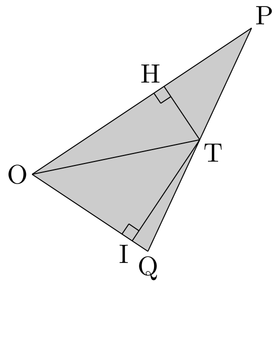
$\therefore \angle \mathrm{F'PO} = \angle \mathrm{FPT}\cdots$(i)

$$
\begin{aligned}
\angle \mathrm{PFT} &= \angle \mathrm{PRT} \\
&= \angle \mathrm{PFQ}\ (\because ①\ (\mathrm{R}, \mathrm{F}\ \text{の外角}))\cdots\text{(ii)}
\end{aligned}
$$

(3)



H の主軸に関して P と同じ側の点 R を、FR // OP を満たすように取る。
H の主軸に関して Q と同じ側の点 S を、FS // OQ を満たすように取る。
広義 2 接線系基本定理より$\angle\mathrm{PFT} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{RFT} \cdots$①$, \angle\mathrm{TFQ} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{TFS} \cdots$②
① + ②より$\angle\mathrm{PFQ} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{RFS}$(優)$ = \angle\mathrm{OFR} \cdots$③
故に$\angle\mathrm{PFQ}$ は T の位置に依らない。$\cdots$ (i)
H の主軸に関して P と同じ側の点 U を、F′U // OP を満たすように取る。
H の主軸に関して Q と同じ側の点 V を、F′V // OQ を満たすように取る。
同様にして、$\angle\mathrm{PF'Q} = \angle\mathrm{OF'U} \cdots$④は T の位置に依らない。$\cdots$ (i)
③ + ④より$\angle\mathrm{PFQ} + \angle\mathrm{PF'Q} = \angle\mathrm{OFR} + \angle\mathrm{OF'U} = 180^\circ$ (同側内角) $\cdots$ (i)
広義 2 接線系基本定理より$\angle\mathrm{PFT} = \angle\mathrm{PFR} \cdots$①′$, \angle\mathrm{FPT} = \angle\mathrm{F'PO}, \therefore \angle\mathrm{FPO} = \angle\mathrm{F'PT} \cdots$⑤
$\therefore \angle\mathrm{PFT} = \angle\mathrm{PFR}$ ($\because$ ①′)
$= \angle\mathrm{FPO}$ (錯角)
$= \angle\mathrm{F'PT}$ ($\because$ ⑤)
$\therefore \angle\mathrm{PFT} = \angle\mathrm{F'PT} \cdots$⑥
光線定理より$\angle\mathrm{PTF'} = \angle\mathrm{FTP} \cdots$⑦
⑥, ⑦より $\triangle\mathrm{PF'T} \backsim \triangle\mathrm{FPT}$ (2 角相等) $\cdots$⑧
⑧, 双対相似定理より、$\mathrm{TP} = \mathrm{TQ} \cdots$ (ii)$, \mathrm{TF} + \mathrm{TF'} = \mathrm{OP} + \mathrm{OQ} \cdots$ (iii)$, \mathrm{OF}^2 = \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} \cdots$⑨
故に、$\angle\mathrm{POF} = \theta$とすると、⑨より $\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}\mathrm{OF}^2\sin 2\theta$
故に $\triangle\mathrm{OPQ}$ は T の位置に依らない。$\cdots$ (iv)



$\triangle\mathrm{OPQ} = S$ とする。
(ii) より、$\triangle\mathrm{OPT}$ について、$\dfrac{1}{\cancel{2}_1} S = \dfrac{1}{\cancel{2}_1}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{TH}$
$\therefore \mathrm{TH} = \dfrac{S}{\mathrm{OP}}$, 同様にして $\mathrm{TI} = \dfrac{S}{\mathrm{OQ}}$
$\therefore \mathrm{TH}\cdot\mathrm{TI} = \dfrac{S}{\mathrm{OP}}\cdot\dfrac{S}{\mathrm{OQ}} = \dfrac{S^2}{\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}} = \dfrac{S^2}{\mathrm{OF}^2}$ ($\because$ ⑨)
$\left(= \dfrac{1}{4}\mathrm{OF}^2\sin^2 2\theta = \dfrac{1}{2}S\sin 2\theta\right)$
故に、(iv) より $\mathrm{TH}\cdot\mathrm{TI}$ は T の位置に依らない。$\cdots$ (v) ■