【13】楕円 E の焦点を F,F' とする。E の長軸と E の交点の内、F に近い方を A, 他方を A' とする。E の短軸と E の交点 B,B' を、$\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{A}',\mathrm{B}'$ が反時計回りであるように決める。E の中心を O とする。$\mathrm{OA}=a, \mathrm{OB}=b$ とする。

E 上に点 T を、A と異なり、$\mathrm{TF}' > \mathrm{TF}$ を満たすように取る。E の T における法線と E の長軸, 短軸の交点をそれぞれ P,Q とする。

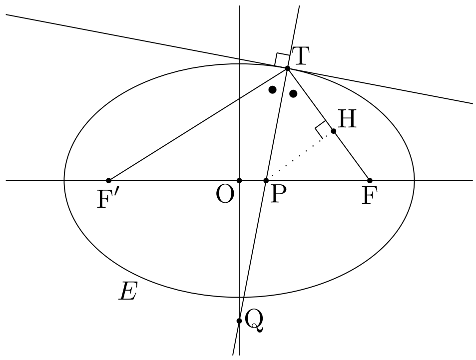
次の (1) ～ (4) を証明せよ。

(1) $\dfrac{\mathrm{FT}}{\mathrm{FP}}$ は T の位置に依らない。

(2) $\mathrm{T},\mathrm{F}',\mathrm{Q},\mathrm{F}$ は共円点。

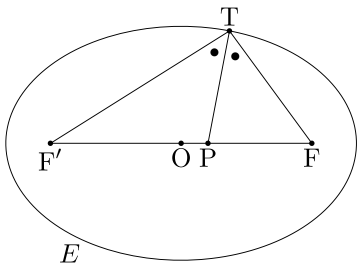
(3) $\dfrac{\mathrm{PT}}{\mathrm{PQ}}$ は T の位置に依らない。

(4) P から直線 TF に下ろした垂線の足を H とすると、TH は T の位置に依らない。



[解答]

(1)

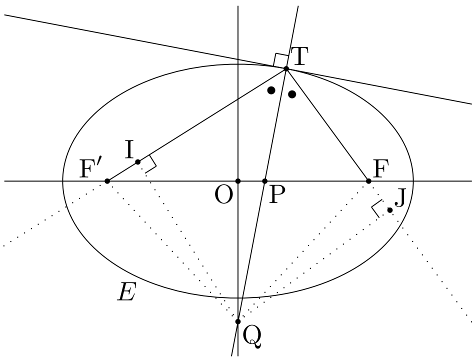


$$\frac{\mathrm{F'T}}{\mathrm{F'P}} = \frac{\mathrm{FT}}{\mathrm{FP}}$$ (角の 2 等分線の定理)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\mathrm{FT}}{\mathrm{FP}} &= \frac{\mathrm{FT} + \mathrm{F'T}}{\mathrm{FP} + \mathrm{F'P}} \\ &= \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}\sqrt{a^2 - b^2}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \end{aligned}$$

故に $\dfrac{\mathrm{FT}}{\mathrm{FP}}$ は T の位置に依らない。

(2)



Q から直線 $\mathrm{TF'}$, 直線 TF に下ろした垂線の足を I, J とする。

$\mathrm{T} \neq \mathrm{B}, \mathrm{B'}$ より $\mathrm{I} \neq \mathrm{F'}, \mathrm{J} \neq \mathrm{F}$

故に、$\mathrm{QF'} = \mathrm{QF}, \mathrm{QI} = \mathrm{QJ}, \angle\mathrm{QIF'} = \angle\mathrm{QJF'} = 90^\circ$ より、$\triangle\mathrm{QF'I} \equiv \triangle\mathrm{QFJ}$ (1 辺両端角相等) $\cdots$ ①

①より $\mathrm{F'I} = \mathrm{FJ} \cdots$ ②

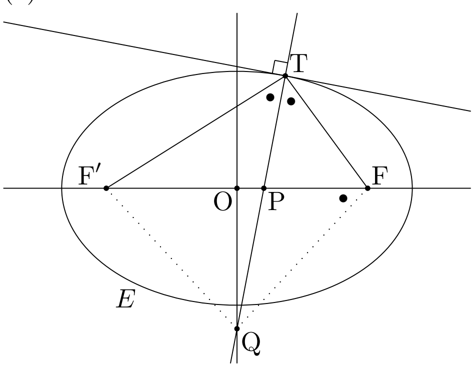
一方、$\triangle\mathrm{QIT} \equiv \triangle\mathrm{GJT}$ (1 辺両端角相等) より $\mathrm{TI} = \mathrm{TJ} \cdots$ ③

②, ③, $\mathrm{TF'} > \mathrm{TF}$ より、I は $\mathrm{TF'}$ 上に有り、J は TF の F の方の延長上に有る。

①より $\angle\mathrm{QF'I} = \angle\mathrm{QFJ}$

故に 4 点 F, T, F′, Q は共円点。

(3)



(2) より $\angle\mathrm{FTQ} = \angle\mathrm{F'TQ} = \angle\mathrm{F'FQ}$ (円周角)

$\therefore \triangle\mathrm{FTQ} \backsim \triangle\mathrm{PFQ}$ (2 角相等)

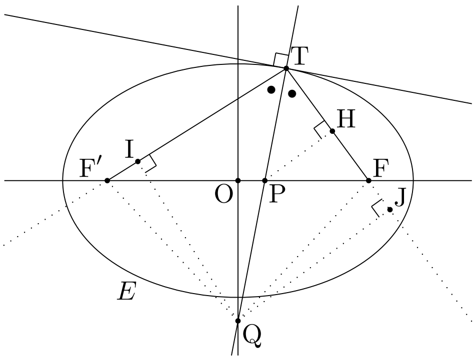
$\therefore \dfrac{\mathrm{TQ}}{\mathrm{PQ}} = \dfrac{\triangle\mathrm{FTQ}}{\triangle\mathrm{PFQ}}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{FT}^2}{\mathrm{PF}^2} \\
&= \frac{a^2}{(\sqrt{a^2-b^2})^2} \ (\because (1)) \\
&= \frac{a^2}{a^2-b^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{PQ}} &= \frac{\cancel{a^2}-(\cancel{a^2}-b^2)}{a^2-b^2} \\
&= \frac{b^2}{a^2-b^2}
\end{aligned}
$$

これは T の位置に依らない。

(4)



$$
\begin{aligned}
\mathrm{TJ} &= \frac{1}{2}(\mathrm{TI}+\mathrm{TJ}) \ (\because ③) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{TF'}+\mathrm{TF}) \ (\because ②) \\
&= a
\end{aligned}
$$

(3) より $\dfrac{\mathrm{TP}}{\mathrm{TQ}} = \dfrac{b^2}{a^2}$

$\therefore \mathrm{TH} = \cancel{a} \times \dfrac{b^2}{a^{\cancel{2}}} = \dfrac{b^2}{a}$

これは T の位置に依らない。■

■**研究** シムソンの定理の逆より、I, O, J は同一直線上に有る。