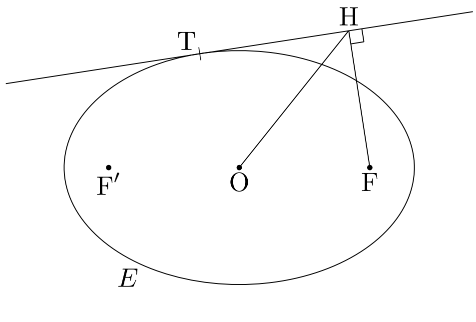
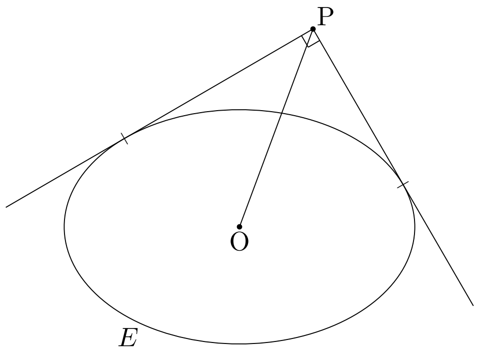
【12】楕円 E の焦点を F, F$'$ とする。E の長軸と E の交点の内、F に近い方を A, 他方を A$'$ とする。E の短軸と E の交点 B, B$'$ を、A, B, A$'$, B$'$ が反時計回りであるように決める。E の中心を O とする。$\mathrm{OA}=a, \mathrm{OB}=b$ とする。次の (1), (2) を証明せよ。

(1) E 上に T を取る。F から E の T における接線に下ろした垂線の足を H とする。
この時、$\mathrm{OH}=a$
(H の軌跡 (= O を中心とする半径 a の円) を E の補助円と言う。)

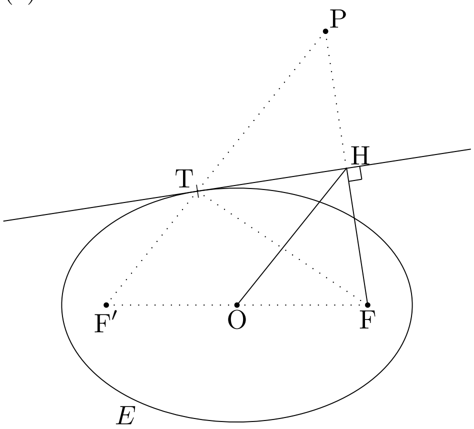


(2) E の外側の点 P を、P から E に引いた接線が直交するように取る。
この時、$\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$
(P の軌跡 (= O を中心とする半径 $\sqrt{a^2+b^2}$ の円) を E の準円と言う。)



[解答]

(1)



F の直線 TH に関する対称点を P とする。

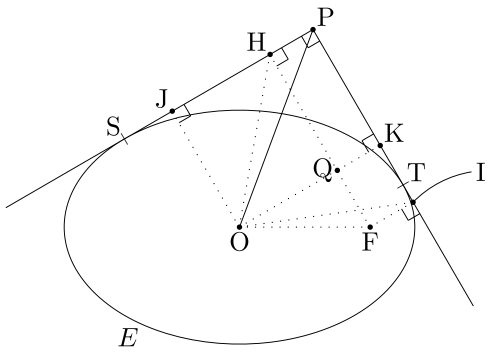
F, H, P は同一直線上に有る。

光線定理より、F′, T, P は同一直線上に有る。

$$
\begin{aligned}
\therefore \mathrm{OH} &= \frac{1}{2}\mathrm{F'P} \ (\text{中点連結定理}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{F'T} + \mathrm{TP}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{F'T} + \mathrm{TF}) \\
&= \frac{1}{\cancel{2}_{1}} \times \cancel{2}a \\
&= a
\end{aligned}
$$

(2)

[解 1]



2 つの接点を S, T とする。

F から直線 PS, 直線 PT に下ろした垂線の足をそれぞれ H, I とする。

O から直線 PS, 直線 PT に下ろした垂線の足をそれぞれ J, K とする。

(1) より、$\mathrm{OH} = \mathrm{OI} = a \cdots$ ①

$\therefore \mathrm{OP}^2 = \mathrm{OJ}^2 + \mathrm{OK}^2$

$\quad = (a^2 - \mathrm{HJ}^2) + (a^2 - \mathrm{IK}^2)$ ($\because$ ①)

$\quad = 2a^2 - (\mathrm{HJ}^2 + \mathrm{IK}^2)$

$\quad = 2a^2 - (\mathrm{QO}^2 + \mathrm{QF}^2)$

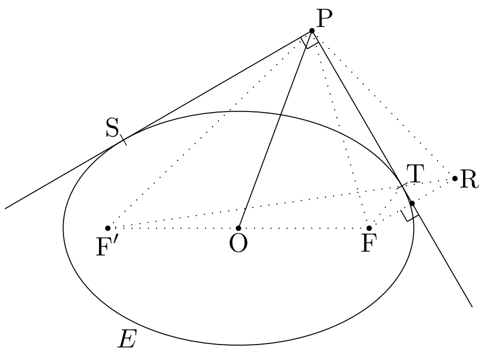
$\quad = 2a^2 - \mathrm{OF}^2$

$\quad = 2a^2 - (a^2 - b^2)$

$\quad = a^2 + b^2$

$\therefore \mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$

[解 2]



$\mathrm{PF'}^2 + \mathrm{PF}^2 = 2(\mathrm{OP}^2 + \mathrm{OF}^2)$ (中線定理) $\cdots$ ①

2 つの接点を S, T とする。

F の直線 PT に関する対称点を R とする。

光線定理より、F′, T, R は同一直線上に有る。

$\therefore \mathrm{F'R} = \mathrm{F'T} + \mathrm{TR} = \mathrm{F'T} + \mathrm{TF} = 2a \cdots$ ②

$\angle\mathrm{F'PR} = \angle\mathrm{F'PT} + \angle\mathrm{TPR}$

$= \angle\mathrm{F'PT} + \angle\mathrm{TPF}$

$= \angle\mathrm{F'PT} + \angle\mathrm{SPF'}$ (2 接線系基本定理)

$= 90^\circ \cdots$ ③

②, ③より、$\mathrm{PF'}^2 + \mathrm{PF}^2 = \mathrm{PF'}^2 + \mathrm{PR}^2 = \mathrm{F'R}^2 = 4a^2 \cdots$ ④

一方、$\mathrm{OF}^2 = a^2 - b^2 \cdots$ ⑤

④, ⑤を①に代入すると、$\cancel{4}^{2} a^2 = \cancel{2}(\mathrm{OP}^2 + a^2 - b^2)$

$\mathrm{OP}^2 = a^2 + b^2$

$\therefore \mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ■