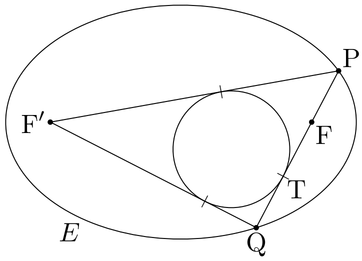
【11】楕円 E の焦点を F, F' とする。E の長軸と E の交点の内、F に近い方を A, 他方を A' とする。E の短軸と E の交点 B, B' を、$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}', \mathrm{B}'$ が反時計回りであるように決める。E の中心を O とする。$\mathrm{OA} = a, \mathrm{OB} = b$ とする。次の (1), (2) を証明せよ。

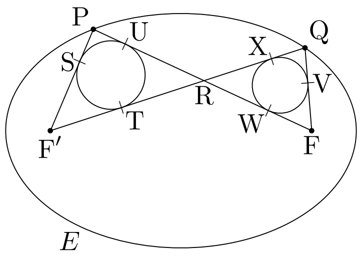
(1) E 上に A, A' と異なる 2 点 P, Q を、PQ が E の F に関する焦点弦 (F を通る弦) であるように取る。$\triangle \mathrm{F}'\mathrm{PQ}$ の内接円と PQ の接点を T とする。

この時、$\mathrm{PF} = \mathrm{QT}$



(2) E 上に 2 点 P, Q を、直線 AA' に関して同じ側であるように取る。PF と QF' の交点を R とする。$\triangle \mathrm{PF}'\mathrm{R}$ の内接円と $\mathrm{PF}', \mathrm{F}'\mathrm{R}, \mathrm{RP}$ の接点をそれぞれ S, T, U とする。$\triangle \mathrm{QFR}$ の内接円と QF, FR, RQ の接点をそれぞれ V, W, X とする。

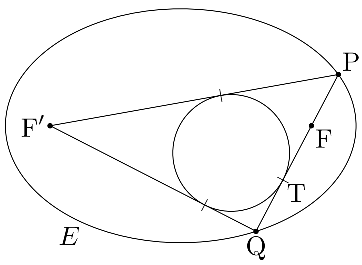
この時、$\mathrm{PS} = \mathrm{QV}$



[解答]

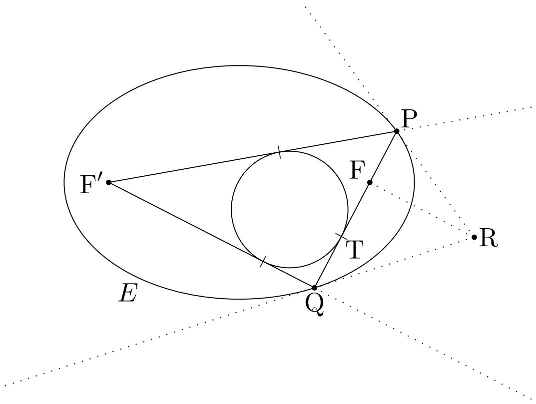
(1)

[解 1]



$$
\begin{aligned}
\mathrm{QT} &= \frac{1}{2}(\mathrm{QP}+\mathrm{QF}'-\mathrm{PF}') \\
&= \frac{1}{2}(\underline{\mathrm{QF}}+\mathrm{FP}\ \underline{+\ \mathrm{QF}'}-\mathrm{PF}') \\
&= \frac{1}{2}(\underline{2a}+\mathrm{FP}\ \underline{-\ \mathrm{PF}'}) \\
&= \frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot\cancel{2}\mathrm{PF} \\
&= \mathrm{PF}
\end{aligned}
$$

[解 2]



E の P における接線と Q における接線の交点を R とする。

光線定理より、PR, QR はそれぞれ$\angle \mathrm{QPF}', \angle \mathrm{PQF}'$の外角の 2 等分線である。

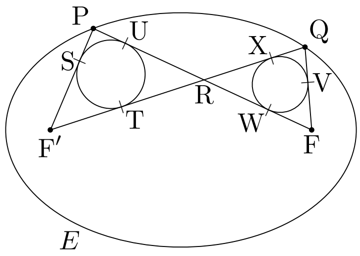
故に、R は $\triangle \mathrm{F}'\mathrm{PQ}$ の F'に関する傍心である。$\cdots$①

2 接線系基本定理より、$\angle \mathrm{PFR} = 180^\circ \div 2 = 90^\circ \cdots$②

①, ②, 3 角形の内接円と傍接円の関係より、$\mathrm{PF} = \mathrm{QT}$

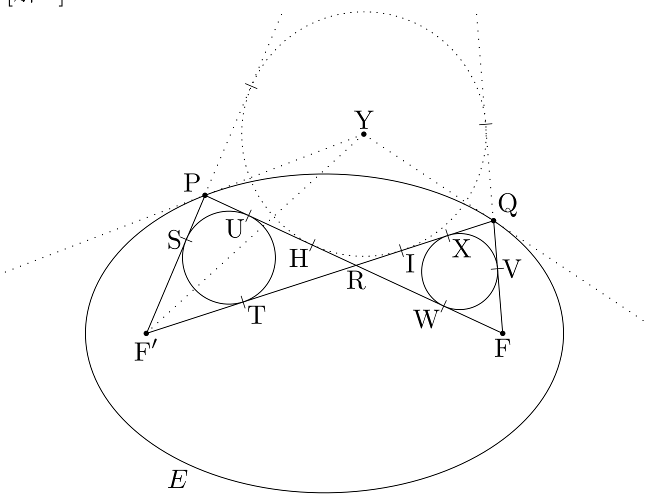
(2)

[解 1]



$$
\begin{aligned}
\mathrm{PS} &= \frac{1}{2}(\mathrm{PF}' + \mathrm{PR} - \mathrm{F}'\mathrm{R}) \\
&= \frac{1}{2}(2a - \mathrm{RF} - \mathrm{F}'\mathrm{R}) \ (\because \mathrm{PF}' + \mathrm{PR} + \mathrm{RF} = \mathrm{PF}' + \mathrm{PF} = 2a) \\
&= \frac{1}{2}(2a - \mathrm{RF}' - \mathrm{FR}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{QF} + \mathrm{QR} - \mathrm{FR}) \ (\because \mathrm{QF} + \mathrm{QR} + \mathrm{RF}' = \mathrm{QF} + \mathrm{QF}' = 2a) \\
&= \mathrm{QV}
\end{aligned}
$$

[解 2]



E の P における接線と Q における接線の交点を Y とする。

光線定理より、PY は$\angle \mathrm{F}'\mathrm{PF}$ の外角の 2 等分線$\cdots$①, QR は$\angle \mathrm{F}'\mathrm{QF}$ の外角の 2 等分線$\cdots$②

2 接線系基本定理より、F′Y は$\angle \mathrm{PF}'\mathrm{Q}$ の 2 等分線$\cdots$③

①, ②, ③より、半直線 F′P, PR, RQ, 半直線 FQ に接する円 Y が存在する。

この円 Y と PR, RQ の接点をそれぞれ H, I とする。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PS} &= \mathrm{PU} \\
&= \mathrm{RH} \ (3\text{ 角形の内接円と傍接円の関係}) \\
&= \mathrm{RI} \\
&= \mathrm{QX} \ (3\text{ 角形の内接円と傍接円の関係}) \\
&= \mathrm{QV} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$