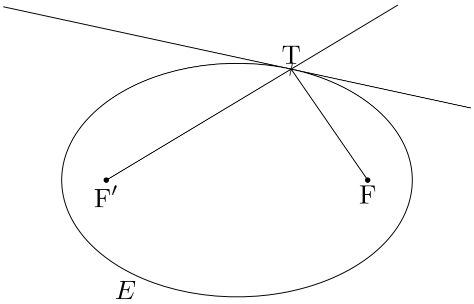
【10】楕円 E の焦点を F, F' とする。E の長軸と E の交点の内、F に近い方を A, 他方を A' とする。E の短軸と E の交点 B, B' を、$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}', \mathrm{B}'$ が反時計回りであるように決める。E の中心を O とする。$\mathrm{OA} = a, \mathrm{OB} = b$ とする。次の (1) ~ (3) を証明せよ。

(1) E 上に点 T を取る。この時、E の T における接線は $\angle \mathrm{FTF}'$ の外角を 2 等分する。[光線定理]

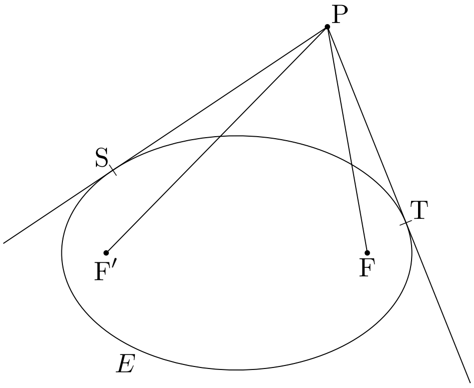


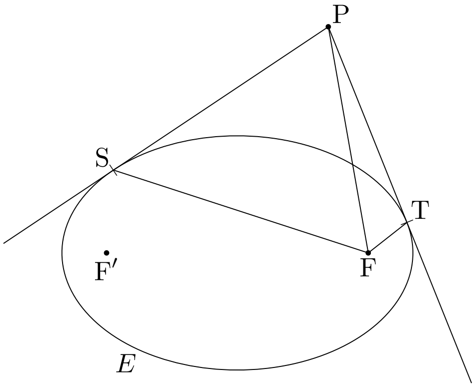
(2) E の外部の点 P を取る。P から E に引いた接線の接点を S, T とする。

この時、次の (i), (ii) が成り立つ。[2 接線系基本定理]

(i) $\angle \mathrm{F}'\mathrm{PS} = \angle \mathrm{FPT}$

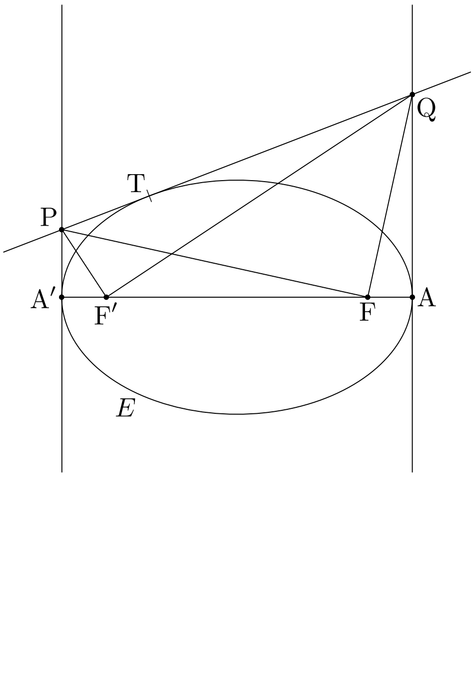
(ii) $\angle \mathrm{SFP} = \angle \mathrm{TFP}$





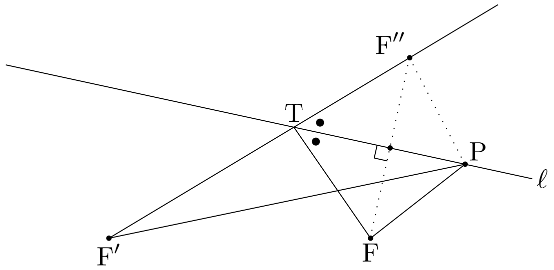
(3) E 上に A, A' と異なる点 T を取る。E の T における接線と E の A, A' における接線の交点をそれぞれ P, Q とする。

この時、$\angle \mathrm{PFQ} = \angle \mathrm{PF}'\mathrm{Q} = 90^\circ$



[解答]

(1)



$\angle \mathrm{F'TF}$ の外角の 2 等分線を ℓとする。

F の ℓに関する対称点を $\mathrm{F''}$とする。この時、ℓの定義より、$\mathrm{F''}$は半直線 $\mathrm{F'T}$ 上に有る。$\cdots$①

ℓ上の点で、T でない任意の点 P を取る。

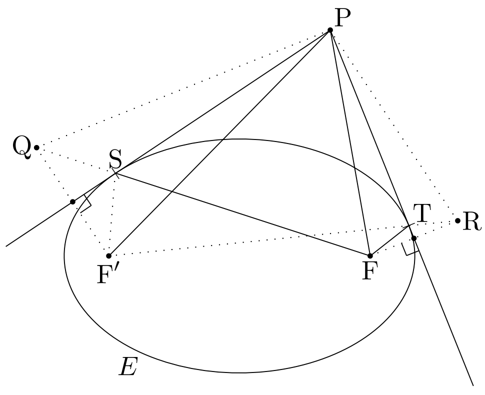
$$\begin{aligned}\mathrm{PF}+\mathrm{PF'} &= \mathrm{PF''}+\mathrm{PF'}\\ &> \mathrm{F'F''}\ (\because \triangle \mathrm{PF''F'}\text{に関する 3 角形不等式})\\ &= \mathrm{TF''}+\mathrm{TF'}\ (\because ①)\\ &= \mathrm{TF}+\mathrm{TF'}\end{aligned}$$

故に、P は E の外側に有る。

故に、E と ℓは T のみで交わる。

故に、ℓは E の T における接線である。

(2)



$\mathrm{F'}$の PS に関する対称点を Q, F の PT に関する対称点を R とする。

$\mathrm{PQ}=\mathrm{PF'}$ (Q の定義)$\cdots$①, $\mathrm{PF}=\mathrm{PR}$ (R の定義)$\cdots$②

光線定理より、3 点 F, S, Q は同一直線上に有る。

$\therefore \mathrm{QF}=\mathrm{QS}+\mathrm{SF}=\mathrm{F'S}+\mathrm{SF}=2a$

同様にして $\mathrm{RF'}=2a$

$\therefore \mathrm{QF}=\mathrm{F'R}\cdots$③

①, ②, ③より $\triangle \mathrm{PQF}\equiv\triangle \mathrm{PF'R}$ (3 辺相等)$\cdots$④

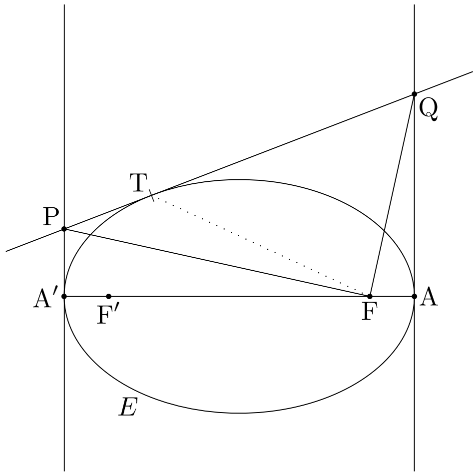
④より$\angle \mathrm{QPF}=\angle \mathrm{F'PR}$

両辺から$\angle \mathrm{F'PF}$ を引くと、$\cancel{2}\angle \mathrm{F'PS}=\cancel{2}\angle \mathrm{FPT}$

$\therefore\angle \mathrm{F'PS}=\angle \mathrm{FPT}\cdots$(i)

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{SFP} &= \angle \mathrm{F'RP}\ (\because ④)\\ &= \angle \mathrm{PFT}\cdots\text{(ii)}\end{aligned}$$

(3)



$$\begin{aligned}\therefore \angle \mathrm{PFQ} &= \angle \mathrm{PFT} + \angle \mathrm{QFT} \\ &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{A'FT} + \frac{1}{2}\angle \mathrm{AFT} \ (\because (2)(\mathrm{ii})) \\ &= \frac{1}{2}(\angle \mathrm{A'FT} + \angle \mathrm{AFT}) \\ &= \frac{1}{2} \times 180^\circ \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

同様に$\angle \mathrm{PF'Q} = 90^\circ$ ■