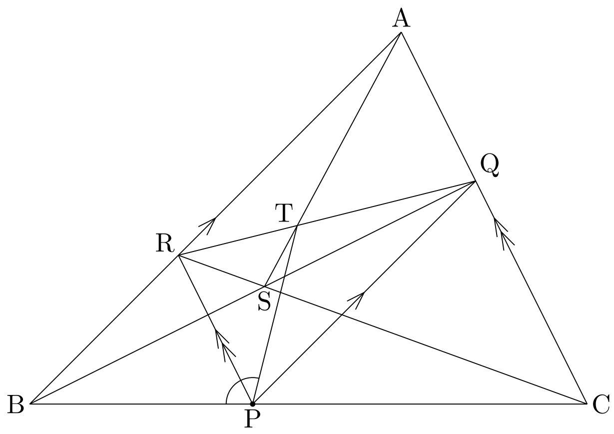
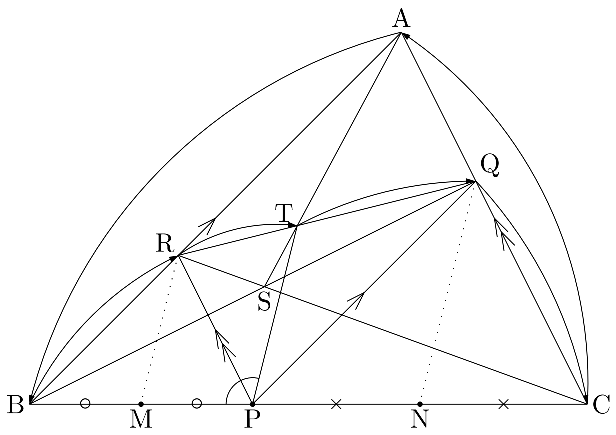
【1】△ABC において、辺 BC 上 (両端を除く) に点 P を取る。P を通り辺 BA に平行な直線と辺 CA の交点を Q, P を通り辺 CA に平行な直線と辺 BA の交点を R とする。BQ と CR の交点を S とし、QR と AS の交点を T とする。

この時∠TPB は P の位置に依らない事を証明せよ。



[解答]



チェバの定理より、$\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{AB}}\cdot\dfrac{\mathrm{TQ}}{\mathrm{RT}}\cdot\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{QC}}=1$

ここで $\mathrm{RP}\,/\!/\,\mathrm{AC},\mathrm{QP}\,/\!/\,\mathrm{AB}$ より、$\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{AB}}\cdot\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{QC}}=\dfrac{\mathrm{BP}}{\cancel{\mathrm{BC}}}\cdot\dfrac{\cancel{\mathrm{CB}}}{\mathrm{CP}}=\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CP}}$

$\therefore\dfrac{\mathrm{TQ}}{\mathrm{RT}}=\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{BP}}\cdots$①

BP,PC の中点をそれぞれ M,N とする。

①より、$\mathrm{RT}:\mathrm{TQ}=\mathrm{BP}:\mathrm{CP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BP}:\dfrac{1}{2}\mathrm{CP}=\mathrm{MP}:\mathrm{PN}$

$\therefore \mathrm{RM}\,/\!/\,\mathrm{TP}\,/\!/\,\mathrm{QN}$ (平行線と線分の比)

$\therefore\angle\mathrm{TPB}=\angle\mathrm{RMB}$ (同位角)$\cdots$②

ここで、$\triangle\mathrm{RBP}\backsim\triangle\mathrm{ABC}$ (2 角相等) より $\triangle\mathrm{RBP}$ の形は一定, 故に $\triangle\mathrm{RBM}$ の形も一定である。

故に$\angle\mathrm{RMB}$ は P の位置に依らない。

故に、②より$\angle\mathrm{TPB}$ は P の位置に依らない。■

■研究 後に、放物線の 3 接線系において本問の図が現れる。